Revista Logos N.º 16: 29-42 / julio - diciembre de 2009

# La conquista de los números: una aproximación a la filosofía de Frege[1]

Miguel Fonseca*

Fecha de recepción: 1 de septiembre de 2009
Fecha de aprobación: 28 de septiembre de 2009

***A Paola Fernández, el más precioso motivo.***

Arithmetic must be discovered in just the same sense in which Columbus discovered the West Indians, and we no more create numbers than he created the Indians.
**Bertrand Russell**


## Resumen

Este artículo se enmarca en el proyecto de investigación de la Maestría en Filosofía Latinoamericana, *Bartolomé de Las Casas: Recepción de la filosofía analítica en Colombia y Latinoamérica* de la Universidad Santo Tomás. Inicialmente fue redactado en inglés: *The Quest for the Numbers: An Approach to Frege's Philosophy*, cuyo trabajo pretende acercarse al fundamento de la obra fregeana como hito fundamental del pensamiento filosófico; asimismo, desarrolla en detalle los temas y puntos más relevantes de su sistema de pensamiento.

A partir de un análisis del proyecto logicista, es decir, la búsqueda de una reducción de la matemática a la lógica, se demuestran las fuertes influencias del pensamiento de Frege en todas las ramas de la filosofía contemporánea. La comprensión de la filosofía de Frege entonces constituye un paso fundamental, para tener un horizonte acerca de las problemáticas de la filosofía en la actualidad y, asimismo, un fundamento o propedéutica para el desarrollo de un pensamiento latinoamericano maduro en diálogo con la tradición.


**Palabras clave:** Frege, número, filosofía analítica, concepto, lógica.

1 Este trabajo es el resultado de la pasantía de investigación en el grupo *Logic and Formal Episthemology* de la Facultad de Filosofía de la Universität Konstanz, bajo la tutoría del profesor Wolfgang Sphon, entre junio y julio de 2008. El texto originalmente fue escrito en inglés y presentado como conferencia al grupo de investigación y al seminario de doctorandos del profesor Spohn, el 11 de junio de 2008.

* Filósofo de la Universidad Santo Tomás. Profesor de Lógica y Filosofía Analítica en la Universidad Santo Tomás. Miembro del Grupo de Investigación de Epistemología formal de la Universitât Konstanz. Correo electrónico: miguelfonseca@correo.usta.edu.co

# The conquest of the numbers. A approximation to Frege's philosophy


## Abstract

The present article is framed on Bartolomé de Las Casas Research Project: Recepción de la Filosofía Analítica en Colombia y Latinoamérica. First of all, it is an approach to Frege´s Philosophy, its main problems and topics. In this sense is a pro-pedeutic work for further research projects. This overview wants to establish the Frege´s logicism as a milestone in the development of philosophy, through the analysis of logicism and the main ontological notions developed by Frege. Finally, a critical assessment on Frege´s fundamental notions completed the work.


**Keywords:** Frege, number, Analytic Philosophy, Concept, Logics.

## La revolución filosófica fregeana

Gottlob Frege es reconocido como uno de los más importantes filósofos en la tradición de la lógica. La Conceptografía (*Begriffsschrift*), "the most important event in the development of modern logic"[2] (Beaney, 2005: 26), sólo puede ser comparada con los *Analíticos Primeros* de Aristóteles. Frege es denominado "the founder of mathematical logic"[3] (Dummett, 1981: 665) y asimismo, "one of the founders of analytic philosophy"[4] (Beaney, 1996: 683). *Begriffsschrift* indudablemente constituye el cimiento sobre el cual reposa la lógica moderna y, en este sentido, el epíteto de fundador atribuido a Frege es el más apropiado. Sin embargo, algunos autores, dejando atrás tales consideraciones, han querido ver en Frege simplemente un sistematizador de los avances lógicos que, en la tradición, inician en el mismo Aristóteles y atraviesan los trabajos de Leibniz, Mill, Hobbes, Boole y Morgan. Esta perspectiva convierte a Frege en un filósofo menor que define un método en una rama específica de la filosofía, pero sin alcanzar una posición de privilegio dentro de la tradición filosófica. En este punto resulta pertinente preguntar: ¿La filosofía de Frege debería ser valorada únicamente por las contribuciones metodológicas de *Begriffsschrift*? De acuerdo con el profesor Michael Dummet, se podría afirmar que la importancia de la filosofía de Frege "is far greater than that"[5]. (Dummett, 1981: 685.)

Toda la filosofía fregeana se puede enmarcar en el proyecto logicista. Tal proyecto ha generado una *revolución* en filosofía que implica un nuevo *ethos*. En este sentido, *Begriffsschrift* constituye apenas un elemento del logicismo, tal como se verá más adelante, lo cual nos impide reducir el lugar asignado a Frege en la tradición refiriéndonos a un trabajo aislado. Las palabras del profesor Dummet describen perfectamente el reconocimiento de Frege como hito significativo:

> Why should someone whose philosophical output was entirely restricted to two quite specialized areas, who never gave us his views on God, free will or immortality, on knowledge, goodness or the mind-body problem, be thought of as a philosopher comparable in importance to Aristotle or to Kant? The answer is that, in concentrating so single-mindedly on the area in which he worked, Frege also gave to it central place in Philosophy; and, in doing this, achieved a revolution as overwhelming as that of Descartes [...] Frege´s primary significance consist precisely in the fact that he made his area of Philosophy not a specialized branch, but the starting-point for the whole subject[6] (Dummett, 1981: 666).

Cuando Dummet se refiere a la revolución, en relación directa con el cambio generado por Descartes, quiere establecer cómo a través de la historia de la filosofía, ciertas ramas de ésta han sido asumidas con prioridad subordinando así a otras. Esto es evidente, por ejemplo, en el gran número de filosofías aplicadas como la filosofía política y la dependencia de la ética de muchos problemas de la teoría de la mente y la epistemología. En el caso cartesiano, la revolución en cuanto a la fundamentación de la filosofía se refiere a la prioridad dada a la teoría del conocimiento como el cimiento de toda filosofía posible. Así,

2 El evento más importante en el desarrollo de la lógica moderna. (En adelante, las traducciones de las citas son del autor)

3 Fundador de la lógica matemática.

4 Uno de los fundadores de la filosofía analítica.

5 Es mucho más grande que esto.

6 ¿Por qué, alguien cuya producción filosófica fue enteramente restringida tan sólo a dos áreas especializadas, quien nunca nos dio sus perspectivas sobre Dios, el libre albedrío o la inmortalidad, sobre el conocimiento, la bondad o el problema de la mente y el cuerpo, debería ser pensado como un filósofo comparado en importancia con Aristóteles o Kant? La respuesta es que, concentrándose singularmente en el área en la cual trabajó, Frege además le dio un lugar central en filosofía y, haciendo esto, logró una revolución que abruma a la de Descartes. La significación principal de Frege consiste precisamente en el hecho que él hizo su área de la filosofía no una rama especializada, sino el punto de partida de todo el asunto.

 Logos, Vol. 1, No. 16 [2009], Art. 3

igualmente, Frege establece a la lógica como la rama central que delimita a las demás.

La lógica, como Frege piensa, debe "*discern the laws of truth*"[7] (Frege, 1984: 351). Es evidente que desde el comienzo, la filosofía ha tenido una correlación con la tarea de la búsqueda de la verdad. La verdad claramente constituye una palabra que puede definir todo el propósito del ejercicio filosófico. Frege asume que, entre las ramas de la filosofía, la más apropiada para encontrar la verdad es la lógica. La lógica no es simplemente la rama de la filosofía que señala las formas correctas del pensamiento, sino que también, asume como tarea encontrar las leyes del ser verdadero, incluso más allá del dominio de la mente. Frege entiende que antes de juzgar algo como verdadero o falso, se deben tener las condiciones necesarias para hacer tal juicio. La lógica, en este sentido, debería ser la ciencia del significado. En conexión con estas consideraciones, Dummet afirma:

> It would, of course, be absurd to pretend that previous philosophers had not often concerned themselves with the analysis of meanings: but Frege was the first –at least since Plato– to make a sharp separation between this task and the later one of establishing what is true and what our grounds are for accepting it [...] the theory of meaning is the fundamental part of Philosophy which underlies all others. Because Philosophy has, as its first if not only task, the analysis of meanings, and because, the deeper such analysis goes, the more it is independent upon a correct general account of meaning, a model for what the understanding of an expression consist in the theory of meaning, which is the search for such a model, is the foundation of all Philosophy, and not epistemology as Descartes misled us into believing. Frege's greatness consists, in the first place, in his having perceived this. He does not start from meaning only in the sense that, e.g., an investigation of the meaning of the expression "natural number" precedes an enquiry into the basis of the laws concerning natural numbers: he starts from meaning by taking the theory of meaning as the only part of Philosophy whose results not depend upon those of any other part, but which underlies all the rest[8] (Dummett, 1981: 669).

Frege introduce un nuevo periodo en la historia de la filosofía, y, por supuesto, la mejor evidencia son los autores y escuelas filosóficas que asumen el problema del análisis del significado, desde diferentes perspectivas, pero siempre, adoptando a la lógica como su fundamento. Por ejemplo, Husserl cambió su perspectiva sobre los fundamentos de la aritmética, impregnada de psicologismo, tras la lectura del artículo de Frege sobre el texto de Husserl titulado *Philosophie der Arithmetik.* Husserl responde a la aguda crítica de Frege en una carta famosa, así:

> First of all, I may be permitted to mention the great stimulation and challenge that I have derived from your Grundlagen. Amongst the many works that were before me during the preparation of my book, I could not name any one which I studied with nearly as much plea-

7 Discernir las leyes de la verdad.

8 Sería absurdo, por supuesto, pretender que filósofos anteriores frecuentemente no se habían dedicado al análisis del significado; sin embargo, Frege fue el primero –al menos desde Platón– en hacer una clara separación entre esta tarea y la ulterior de establecer qué es verdadero y cuál es el fundamento para aceptarlo [...] la teoría del significado es la parte fundamental de la filosofía que define a todas las demás. Puesto que la filosofía tiene, como su primer y único objetivo, el análisis de los significados, y por esto, tal análisis profundo busca, independiente de una explicación general del significado, un modelo en el cual consiste la comprensión de una expresión, la teoría del significado, la cual constituye la búsqueda de tal modelo, es el fundamento de la filosofía, y no la epistemología como Descartes fallidamente creyó. La grandeza de Frege consiste, en primer lugar, en haber percibido esto. Él no inició desde el significado sólo en el sentido en que, por ejemplo, para una investigación del significado de la expresión "número natural", le precede una partiendo de la base de las leyes que conciernen con los números naturales: él inicia desde el significado teniendo la teoría del significado como la única parte de la filosofía cuyos resultados no dependen de ningún otro lugar, pero que delimita a todos los demás.

> sure as yours[9]. (Husserl, citado por Mohanty, 1982: 120)

Además, el vínculo cercano entre Husserl y la *teoría del sentido* de Frege es innegable. Hubert Dreyfus es muy lacónico al respecto. “Husserl simply accepted and applied Frege´s distinctions. The only change that Husserl made in Frege´s analysis was terminological” [10] (Dreyfus, 1972: 139).

Más allá de tales consideraciones polémicas existe una gran influencia del pensamiento de Frege en el desarrollo de la fenomenología (cfr. Mohanty, 1982: 112 y Dummett, 2005: 197).

Los *Principia* de Bertrand Russell inician con la famosa contradicción del V axioma de *Grundgesetze.* El logicismo de Russell fue influenciado por los trabajos en filosofía de la matemática de Frege. De hecho, Russell fue el primero en reconocer el valor de la filosofía de Frege en el apéndice A de los *Principles of Mathematics* titulado *The Logic and Arithmetic Doctrines of Frege* (Russell, 1992: 141). Russell fue influido por el trabajo de Frege no sólo en este sentido, sino aún más, en los avances semánticos de sentido y referencia (Beaney, 2005: 233). Wittgenstein inicia su trabajo filosófico en los *Notebooks* con la palabra *´Frege´* (Wittgenstein, 1992: 49), término clave en todo su inquirir filosófico. Wittgenstein afirma en torno a su primera visita a Frege:

> At the first meeting with Frege my own ideas were so unclear that he was able to wipe the floor with me (Wittgenstein, citado por Nedo, 1983: 89)[11]. The style of my sentences is extraordinarily strongly influenced by Frege. And if I wanted to, I could establish this influence where at first sight no one would see it[12]. (Wittgenstein, 1970: 49)

Por supuesto, más allá de la anécdota, el pensamiento de Wittgenstein tiene una fuerte influencia de Frege. Esto es evidente en los desarrollos lógicos del *Tractatus,* la controversia en los fundamentos de las matemáticas, el *leitmotiv* del *principio del contexto* y la noción de *sentido* y *referencia* como constantes en todos los esfuerzos wittgensteinianos sobre la filosofía del lenguaje. (Cfr. Reck, 2005: 241-285).

Como se ha visto, quizás el núcleo de muchos temas filosóficos depende del *sentido* asumido después de ver tal hito. No obstante, cabe preguntarse: ¿Por qué el sendero cambia su curso en este punto? ¿Qué es el logicismo en sentido estricto? ¿Por qué el logicismo se puede entender como un hito en el desarrollo de la filosofía universal?

## Lógica y aritmética

La visión que busca reducir los fundamentos de la aritmética a la lógica es denominada logicismo. Se refiere a la oportunidad de clarificar el verdadero significado de las mínimas unidades de la matemática desde una perspectiva analítica. Entonces, si se clarifica apropiadamente los fundamentos de esta provincia de la filosofía, se podría proceder de la misma forma y con este método en las demás. La revolución que genera el pensamiento de Frege en los fundamentos de la reflexión filosófica es, primero que todo, una crítica a los fundamentos de la matemática. Frege piensa que *todo* puede caer bajo con-

9 En primer lugar, me permito mencionar el gran estímulo y reto que se han derivado de sus *Grundlagen*. Entre los muchos trabajos que me han antecedido durante la preparación de mi libro, no puedo nombrar uno el cual estudiara tan cercanamente y con tanto placer como el suyo.

10 Husserl simplemente aceptó y aplicó las distinciones de Frege. El único cambio que Husserl hizo respecto al análisis de Frege fue terminológico.

11 En el primer encuentro con Frege mis propias ideas fueron tan confusas que él pudo haber trapeado el piso conmigo.

12 El estilo de mis proposiciones está extraordinariamente influido por Frege. Y, si yo quisiera, podría establecer su influencia donde a primera vista nadie podría verla.

Logos, Vol. 1, No. 16 [2009], Art. 3

ceptos aritméticos. Por tanto, la clave para obtener el fundamento para encontrar la verdad consiste en establecer los fundamentos de la aritmética.

Tras estudiar algunos semestres en Jena, Frege se traslada a Gottingen a estudiar física, filosofía y matemáticas (1869-1871). Sus primeros trabajos antes de *Begriffsschrift* muestran el intento de reducir todos los problemas matemáticos a conceptos lógicos; por ejemplo, su disertación titulada "sobre una representación general de las formas imaginarias en el plano", en la cual muestra sus primeros pensamientos acerca de la geometría y afirma que los conceptos no intuitivos pueden ser representados en figuras visibles. En este sentido, los sistemas axiomáticos deben ser revisados ya que las figuras *reales* pueden caer bajo las formas de imaginarias.

> When we consider that whole geometry rests ultimately on axioms which derive their validity from the nature of our intuitive faculty, we seem well justifies in questioning the sense of imaginary forms, since we attribute to them properties which not infrequently contradict all our intuitions. By the way of comparison let us take forms at infinity, which do not occur in the space of our intuition either. Taken literally, a "point at infinity" is even a contradiction in terms; for the point itself would be the end point of a distance which had no end. [...] By a geometrical representation of imaginary forms in the plane we understand accordingly a kind of correlation in virtue of which every real or imaginary element of the plane has a real, intuitive element corresponding to it[13] (Frege, 1984: 1-3).

Aquí hay una correspondencia entre formas imaginarias y formas reales. De hecho, ahí hay una correspondencia funcional.

$$x = \xi + i\xi', \; y = \eta + i\eta'.$$

Esta concepción funcional se mantiene como estructura fundamental en la obra de Frege; sin embargo, la aritmética y la geometría poseen diferentes fundamentaciones. En su siguiente trabajo, *Habilitationsschrift*, Frege continúa desarrollando la estructura funcional aplicada al concepto de magnitud. Este trabajo es el primer paso para la teoría de la función en *Begriffsschrift*. El objetivo de este trabajo es hacer evidente la necesidad de reducir los conceptos aritméticos a conceptos lógicos. En este sentido, Dathe afirma:

> In the introduction to his Habilitationsschrift, Frege expresses for the first time his thoughts on the various ways in which the principles of geometry and arithmetic are obtained, repudiates all appeals to intuition in the case of arithmetic, and suggests that arithmetic must be reduced to more fundamental concepts than those of number[14] (Dathe, 2005: 41).

De acuerdo con Frege, los matemáticos no han tenido una comprensión total de la naturaleza esencial de los fundamentos de su ciencia, dígase el número. Si no se puede definir la consistencia de tales elementos fundamentales, por ejemplo los números naturales, no podría haber seguridad de la verdad y de la utili-

13 Cuando consideramos que toda la geometría yace finalmente sobre axiomas que derivan su validez de la naturaleza de nuestra facultad intuitiva, nos parece bien justificar y cuestionar el sentido de las formas imaginarias, puesto que les atribuimos propiedades las cuales no sin frecuencia contradicen todas nuestras intuiciones. A manera de comparación permítasenos tomar formas hasta el infinito, que no son el caso tampoco en el espacio de nuestra intuición. Tomado literalmente, un "punto en el infinito" igualmente una contradicción en términos; pero el punto en sí mismo puede ser el punto final de una distancia la cual no tiene fin [...] Mediante una representación geométrica de formas imaginarias en un plano podemos entender de acuerdo con una especie de correlación en virtud de la cual cada elemento real o imaginario del plano tiene un elemento real o intuitivo que se corresponde con él.

14 En la introducción a su *Habilitationsschrift*, Frege expresa por primera vez sus pensamientos sobre las diferentes formas con las cuales se obtienen los principios de la geometría y la aritmética, repudiando todo apoyo a la intuición en el caso de la aritmética, y sugiriendo que la aritmética debe ser reducida a conceptos más fundamentales que los del número.

dad de sistemas más sofisticados. El primer paso fundamental será establecer los fundamentos filosóficos de la aritmética. Frege intenta refutar la intuición y fundamentar las matemáticas en la relación inherente entre lógica y aritmética. Todo concepto de la aritmética puede ser definido lógicamente. Frege afirma:

> The truths of arithmetic govern all that is numerable. This is the widest domain of all; for it belongs not only the actual, not only the intuitable, but every thinkable. Should not the laws of number, then, be connected very intimately with the laws of thought? [15] (Frege, 1980: 14)

La generalidad de la lógica consiste en su carácter normativo; la lógica prescribe las leyes del pensamiento en todo dominio particular. En este sentido la lógica debería prescribir las leyes de cada uno de los dominios particulares de la aritmética:

> The word law is used in two senses. When we speak of moral or civil laws we mean prescriptions, which ought to be obeyed but with which actual occurrences are not always in conformity. Laws of nature are general features of what happens in nature, and occurrences in nature are always in accordance with them. It is rather in this sense that I speak of laws of truth[16] (Frege, 1984: 351).

En este sentido, Frege piensa que la lógica es una ciencia; ella trata con verdades, no solamente con reglas. La generalidad de la lógica consiste en "their unrestricted quantification over all objects and all concepts"[17] (Farleane, 2005: 147). Todo aquello que se puede pensar debe ser gobernado por la lógica. Además, si todo puede ser numerado, habrá que investigar cómo la lógica gobierna a la aritmética.

Hasta ese momento, los fundamentos filosóficos del número habían sido expresados por dos perspectivas principales que se referían al pensamiento de Kant y de Mill. De acuerdo con la primera, la aritmética, como la geometría, se apoyaba en la intuición y, por tanto, el concepto de número era sintético a priori. Kant piensa que siempre podemos apelar a la intuición para enumerar; nosotros necesitamos, por ejemplo, dedos o puntos:

> Man sollte anfänglich zwar denken: dass der Satz 7+5=12 ein bloss analytischer Satz sei, der aus dem Begriffe einer Summe von Sieben und Fünf nach dem Satze des Widerspruches erfolge. Allein, wenn man es näher betrachtet, so findet man, dass der Begriff der Summe von 7 und 5 nichts weiter enthalte, als die Vereinigung beider Zahalen in eine einzige, wodurch ganz und gar nicht gedacht wird, welches diese einzige Zahl sei, die beide zusammenfasst. Der Begriff von Zwölf ist keinesweges dadurch schon gedacht, dass ich mir bloss jene Vereinigung von Sieben und Fünf denke, und, ich mag meinen Begriff von einer solchen möglichen Summe noch so lange zergliedern, so werde ich doch darin die Zwölf nicht antreffen. Man muss über diese Begriffe hinausgehen, indem man die Anschauung zu Hülfe nimmt, die einem von beiden korrespondiert, etwa seine fünf Finger, oder (wie Segner in seiner Arithmetik) fünf Punkte, und so nach und nach die Einheiten

15 Las verdades de la aritmética gobiernan todo lo que es numerable. Éste es amplio dominio de todo; a él pertenecen no tan sólo lo actual, no tan sólo lo intuible, sino todo lo pensable. ¿Entonces, no deberían, las leyes del número, estar conectadas muy íntimamente con las leyes del pensamiento?

16 La palabra *ley* es usada en dos sentidos. Cuando hablamos de leyes morales y civiles significamos prescripciones, las cuales obligan a ser obedecidas empero, sin estar siempre en conformidad con las cosas que acaecen. Las leyes de la naturaleza son características de lo que ocurre en la naturaleza y los hechos de la naturaleza siempre están en concordancia con ellas. Más bien, éste es el sentido en el cual yo hablo de leyes de la verdad.

17 Su irrestricta cuantificación sobre todos los objetos y todos los conceptos.

Logos, Vol. 1, No. 16 [2009], Art. 3

> der in der Anschauung gegebenen Fünf zu dem Begriffe der Sieben hinzutut[18] (Kant, 1998: 65 b 15).

Frege rechaza esta perspectiva. En primer lugar, es impensable la intuición de 777777 dedos o puntos y, además, la clave es que nosotros debemos saber de antemano qué vamos a enumerar: el concepto debe ser establecido antes de cualquier intuición. Los números tienen entonces una relación inherente con los conceptos; la enumerabilidad depende del pensamiento conceptual. En el mismo sentido, Frege rechaza la posición sintética a posteriori de Mill, quien al respecto afirma:

> "There is two and one" a definition of three; but the calculations which depend on that proposition do not follow from the definition itself, but from an arithmetical theorem presupposed in it, namely, that collections of objects exist, which while they impress the senses thus ºººº, may be separated in two parts thus, ºº º, this proposition being granted, we term all such parcels Threes, after which the enunciation of the above mentioned physical fact serve also for a definition of the word Three[19] (Mill, 1973, VII: 257).

En sentido estricto, como se verá posteriormente, para Frege, cada número se refiere a un concepto, y así, los méritos de Mill son refutados. Frege no puede creer que el número 7'777 .777 tenga una unidad correlativa en la realidad que pueda ser generalizada en un nombre. Y más allá, en 7 + 5 = 12, "+" no es una suerte de signo de una acción fáctica como poner algo sobre algo.

Por tanto, la posición de Frege puede ser llamada una perspectiva analítica a priori. El logicismo implica que los números necesitan los conceptos bajo los cuales las cosas pueden ser enumeradas. Así, lo que pueda ser enumerado, como se ha dicho, es todo lo pensable y no solamente la realidad sensible. Finalmente, el número no es una representación o idea, el número es objetivo. Esto conlleva a entender los números como objetos.

Aquí aparece la gran diferencia entre la lógica de Frege y la visión clásica de la lógica. La lógica fue pensada como ciencia formal; por ejemplo, la descripción kantiana de la lógica apunta a esta caracterización, que afirma en la *Crítica*:

Die allgemeine logic löset nun das ganze formale Geschafte des Verstandes und der Vernunf in seine Elemente auf, und stellet sie als prinzipien aller logischen Beurteilung unserer Erkenntis dar. Dieser Teil der Logik kann dahrer Analytic heissen, und ist eben darum der weningstens negative Probierstein der Wahrheit, indem man zuvörderst alle Erkenntnis, ihrer Form nach, an diesen Regeln prüfen und schätzen muss, ehe man sie selbst ihrem Inhalt nach untersucht, um auszumachen, ob sie in Ansehung des Gegenstandes positive Wahrheit enthalten[20] (Kant, 1998: 137).

18 Podría pensarse, de entrada, que la proposición 7 + 5 = 12 es analítica, que se sigue, de acuerdo con el principio de contradicción del concepto siete y cinco. Pero si se observa más de cerca, se encuentra que el concepto de suma de siete y cinco es otra cosa que la unión de ambos números en uno solo, con lo cual no se ningún número que subsuma a los dos. El concepto de doce no está todavía concebido al pensar la unión de siete y cinco. Puedo analizar mi concepto de esa posible suma el tiempo que quiera, pero no encontraré en tal concepto el doce. Hay que ir más allá de esos conceptos y acudir a la intuición correspondiente a uno de los dos, los cinco dedos de la mano, por ejemplo, o bien (como hace Segner en su aritmética) cinco puntos, e ir añadiendo sucesivamente al concepto de siete las unidades del cinco dadas en la intuición.

19 "Hay uno y dos" una definición de tres, pero los cálculos que dependen de esta proposición no se siguen de la definición en sí misma, sino de un teorema aritmético presupuesto en esto, dígase, colecciones de objetos que existen, los cuales impresionan los sentidos así, y pueden ser separados en dos partes; de tal manera que esta proposición puede ser garantizada, y determinamos tales parcelas de tres, luego que la enunciación de los hechos físicos mencionados antes sirven igualmente para la definición de la palabra tres.

20 La lógica general resuelve pues en sus elementos todo el trabajo formal del entendimiento y de la razón y presenta estos elementos como principios de toda apreciación lógica de nuestro conocimiento. Esta parte de la lógica, entonces, puede ser llamada analítica y, por ello mismo, es la piedra de toque negativa de la verdad, puesto que es preciso ante todo examinar y apreciar todo conocimiento en cuanto a su forma, según las reglas, antes de ponerle a prueba en

Como Kant cree, el juicio depende de la relación entre conceptos y objetos; ésta no puede ser analítica. De otro lado, la visión fregeana de la lógica muestra, en el marco de su logicismo, que la lógica no es totalmente una ciencia formal.

> Just as the concept point belongs to geometry, so to logic, too, has its own concepts and relations; and it is only in virtue of this that it can have a contents. Toward what is thus proper to it, its relation is not at all formal. No science is completely formal; but even gravitational mechanics is formal to a certain degree, in so far as optical and chemical properties are all the same to it. To be sure, so far as it is concerned, bodies with different masses are not mutual replacement. To logic for example, there belong the following: negation, identity, subsumption, and subordination of concepts. And here logic brooks no replacement. It is true that in an inference we can replace Charlemagne by Sahara, and the concept king by the concept desert, insofar as this does not alter the truth of the premises. But one may not thus replace the relation of identity by the lying of a point in a plane […][21] (Frege, 1971: 109).

La lógica requiere cierto contenido semántico. La lógica se refiere al mundo objetivo de los objetos y los conceptos. El logicismo de Frege implica una ontología formal.

## La ontología formal de Frege

Quizá la clave para entender la relación que establece Frege entre lógica y ontología es la noción de función matemática. Las funciones son el contexto de la relación compleja entre conceptos y objetos. Éstos son los elementos fundamentales de la ontología fregeana, que afirma: "Statements in general, just like equations or inequalities or expressions in analysis, can be imagined to be split up in two parts; one complete in itself, and other in need to supplementation, or ´unsaturated´"[22] (Frege, 1984: 146).

La matemática, entendida como ciencia, describe propiedades de cierto tipo de objetos: los números. Este proceso descriptivo descansa, finalmente, en las afirmaciones, como en la clásica visión aristotélica de apophansis. Una afirmación vincula un objeto con una propiedad y ésa es el sentido de la expresión *fregeana, un objeto cae bajo un concepto.* Por supuesto, esas afirmaciones deben ser verdaderas o falsas, tan sólo si el objeto permite tal juicio. Aquí aparece la relación entre objetos y conceptos y ésta es la razón para pensar que tal relación es una relación funcional, porque la relación depende de la naturaleza de los objetos. Por tanto, la naturaleza de estos objetos es real y no depende del proceso mental.

En este sentido, para mostrar la relación, Frege usa el esquema matemático de la función. Es posible usar ciertos valores de verdad y llenar las funciones, por ejemplo:

$$( \ ) + ( \ ) = ( \ ) \ Fx \ x + y = 2$$
$$\text{i. } 1 + 1 = 2$$

cuanto a su contenido, con objeto de establecer si, con relación al objeto, se incluye la verdad positiva.

21 Así como el concepto de punto pertenece a la lógica, de igual manera, la lógica tiene sus propios conceptos y relaciones; y esto sólo en virtud que aquella pueda tener un contenido. En aras de saber qué es entonces propio a ésta, su relación no puede ser únicamente formal. Ninguna ciencia es completamente formal; aunque incluso la mecánica gravitacional es formal hasta cierto grado, tanto como las propiedades ópticas y químicas son todas iguales a ésta. Para estar seguros, en la medida en que nos concierne, cuerpos con diferentes masas no se pueden remplazar mutuamente. A la lógica, por ejemplo, le pertenecen los siguientes conceptos: negación, identidad, subsunción, subordinación de conceptos. Y aquí la lógica remplaza. Es cierto que en una inferencia puedo remplazar Carlo Magno por Sahara, y el concepto rey por el concepto desierto, pues esto no altera la verdad de las premisas. Sin embargo, no podría remplazarse así la relación de identidad al afirmar un punto en un plano.

22 Las oraciones en general, de la misma forma que las ecuaciones o expresiones en análisis, pueden ser imaginadas como "partidas" en dos partes; una completa en sí misma, y otra con necesidad de suplementación o insaturada.

ii. 1 + 2 = 2

iii. 2 + 2 = 2

Por tanto, ´i´ es verdadero y los otros falsos.

Así, los conceptos son, en la filosofía de Frege, una especie particular de funciones que mapea objetos verdaderos que caen bajo ciertos límites; por ejemplo, () ≥ 2 (ser mayor o igual que 2). Frege afirma en este sentido: “We thus see how closely that which is called a concept in logic is connected with what we call a function. Indeed we may say at once: a concept is a function whose value is always a truth-value”[23] (Frege, 1984: 146).

En este punto, es bueno decir que Frege usa la palabra concepto no como una noción psicológica, como se afirmaba antes, pues el concepto no se refiere a un asunto mental.

> The word *concept* is used in various ways; its sense is sometimes perhaps a confused mixture of both [...] What I decided was to keep strictly to a pure logical use […] A concept (as I understand the word) is predicative. On the other hand, a name object, a proper name is quite incapable of being used as a grammatical predicate[24] (Frege, 1984: 183).

Entonces, el siguiente paso consiste en saber qué significa *objeto*. El objeto puede ser entendido como un valor de verdad. Los objetos son completos; éstos pueden llenar espacios lógicos.

> The two true-values have already been introduced as possible values of a function; we must go further and admit objects without restriction as values of functions […] When we have thus admitted objects without restriction as arguments and values of functions, the question arises that it is that we are here calling an object […] An object is anything that is not a function, so that an expression for it does not contain any empty place[25] (Frege, 1984: 147).

Estas nociones son el origen no solamente de la concepción fregeana acerca de los números, sino también de las distinciones semánticas de sentido y referencia. Como se puede observar, la expresión lingüística en esas funciones es una afirmación. Entonces, una afirmación está dividida también. Una afirmación contiene un sentido y un significado o referencia.

> The two parts into which a mathematical expression is thus split up, the sign of the argument and the expression of the function, are dissimilar; for the argument is a number, a whole complete in itself, as the function is not[26] (Frege, 1984: 141).

Frege muestra que el problema de la designación inicia en el mal entendimiento de la diferencia entre conceptos y objetos en el contexto de una función. Al mismo tiempo este trabajo semántico ayudará a dilucidar la oscuridad sobre los conceptos ontológicos de objeto y concepto. De hecho, Frege afirma al

23 Podemos ver así cómo cercanamente lo que es llamado un concepto en lógica está conectado con lo que podemos denominar una función. De hecho, se podría decir de una vez: un concepto es una función cuyo valor es siempre un valor de verdad.

24 La palabra *concepto* es usada de varias formas: su sentido es a veces quizá una confusa mixtura de ambos. Lo que he decidido es mantener estrictamente su uso lógico. Un concepto (como yo entiendo la palabra) es predicativo. En la otra mano, un nombre objeto, un nombre propio no está en capacidad de ser usado como predicado gramatical.

25 Los dos valores de verdad ya han sido introducidos como posibles valores de una función.; debemos ir más allá y admitir objetos sin la restricción como valores de funciones. Cuando hemos así admitido objetos sin restricción como argumentos y valores de funciones, aparece la pregunta en tanto eso es lo que llamamos aquí un objeto. Un objeto es aquello que no es una función, entonces, aquello que en una expresión no contiene un lugar vacío.

26 Las dos partes en las cuales una expresión matemática está partida, el signo del argumento y la expresión de la función es disímil: para el argumento es un número, una totalidad completa en sí misma, como para la función no lo es.

respecto que tales categorías, "*cannot be decomposed, and what is logically simple cannot have a proper definition*" (Frege, 1984: 182)[27]. Para explicar este asunto tan oscuro, es posible usar la metáfora fregeana del telescopio:

> Somebody observes the Moon through a telescope. I compare the Moon to itself to the meaning. It is the object of the observation, mediated by the real image projected by the object glass in the interior of the telescope, and by the retinal image of the observer. The former I compare to the sense, the latter is like the idea or experience. The optical image in the telescope is indeed one –sided objective, inasmuch as it can be used by several observers. At any rate it could be arranged for several to use it simultaneously[28] (Frege, 1984: 161).

Frege utiliza esta metáfora para explicar la perfecta correspondencia entre el objeto y su situación y la afirmación ulterior en el juicio. Bajo el esquema de la función, la *imagen* en la afirmación es real si realmente es una imagen de tal estado de cosas. Esa afirmación es un concepto de primer nivel porque su referencia es un objeto real simple. En este sentido, Frege cree que un concepto puede ser entendido como un objeto sólo si es una *buena imagen*; sin embargo, éste es un concepto de segundo nivel.

> Now just as functions are fundamentally different from objects, so also functions whose arguments are and must de functions are fundamentally different from functions whose arguments are objects and cannot be anything else. I call the latter first level, the former second level functions. In the same way, I distinguish between first level and second level concepts […] But this not banish from the world the difference between first level and second level functions; for it is not made arbitrarily, but founded deep in nature of things[29] (Frege, 1984: 153-156).

Éste es otro gran mal entendido que Frege cree haber reparado. Sin embargo, el significado de un concepto de primer nivel, los objetos que caen bajo tal concepto, es el mismo objeto y el sentido es el modo de presentación o concepto. El gran problema es que Frege piensa que no solamente existen objetos fácticos sino que también existen objetos formales. Estos objetos son, por supuesto, los números. Frege entiende los números como cierto tipo de objetos. Por tanto, es posible definir los números en la misma relación compleja de conceptos y objetos en el contexto de la función. Los números son objetos abstractos, conceptos de segundo nivel.

Una función, más claramente, es cierta relación entre conjuntos. Los conceptos definen los objetos o elementos, dígase, los elementos que caen bajo a clase o concepto. El concepto es el límite de los elementos posibles de la clase o concepto. El concepto establece la identidad entre los elementos del conjunto.

El punto es que todo conjunto tiene elementos o no, y en este sentido son numerables. Cuántos elementos satisfacen cierto concepto es una relación sinérgica. Entonces, por ejemplo, es el caso de conceptos

27 No pueden ser descompuestas, y lo que es lógicamente simple no tiene una definición propia.

28 Alguien observa la luna a través de un telescopio. Yo comparo la luna misma como el significado. Éste es el objeto de observación, mediado por la imagen real proyectada por el lente en el interior del telescopio, y por la retina del observador. Él lo comparó con el sentido, lo ulterior es como la idea o experiencia. La imagen óptica en el telescopio es de hecho objetiva en tanto puede ser usada por varios observadores. De cualquier modo puede ser tomada por varios para usarla simultáneamente.

29 Ahora, así como las funciones son diferentes de los objetos, de igual manera las funciones cuyos argumentos son y deben ser funciones son fundamentalmente diferentes de las funciones cuyos argumentos son objetos y no pueden ser algo más. Llamo a las últimas de primer nivel, que construyen funciones de segundo nivel. De la misma forma, distingo entre conceptos de primer y segundo nivel. Sin embargo, no se separa del mundo la diferencia entre funciones de primer y segundo nivel; por esto no se hace arbitrariamente, sino que se fundamenta en la naturaleza profunda de las cosas.

Logos, Vol. 1, No. 16 [2009], Art. 3

que no tienen elementos que caen bajo ellos, conceptos con sólo un elemento y conceptos con dos o más elementos y así hasta el tedio.

Los conceptos que mencionan números son conceptos o funciones de segundo nivel; por ejemplo, el concepto "*ser un planeta de la vía láctea"* cae bajo el concepto *"nueve objetos*". Así, debe haber un objeto que satisfaga "*nueve"* como predicado.

Frege asume la siguiente vía para resolver el asunto. Si el conjunto P y el conjunto Q caen bajo el concepto "*nueve"* estos conceptos son equinuméricos. Por ejemplo *"el autor de las variaciones Goldberg es sólo una persona" y "el autor de la sonata patética es sólo una persona".* Estos *conjuntos,* como se ve, son *equinuméricos.* Por tanto, su rango de valores es equinúmerico y es una función uno a uno. Así, el rango de valores corresponde al concepto "*uno"* debido a la propiedad cardinal.

Los números pueden ser definidos como cierto número de objetos que caen bajo cierto concepto; los números son el rango de valores de una función como equinúmerica, Frege considera que la clase y el rango de valores son lo mismo. Así, los números tienen una relación inherente con todos los objetos. Ésa es la razón para pensar los números de una forma analítica porque en toda relación entre conjuntos aparecen los números como un asunto de la lógica.

Como muestra Kepler la naturaleza de las órbitas de los planetas, un concepto abstracto por supuesto, mediante la disposición de los planetas como objetos, Frege muestra las propiedades de los números a partir de su relación con todo objeto espacio-temporal e indica la realidad de los números como cierto tipo de objetos abstractos:

> Frege´s believe that numbers are objects is not to be dismissed as a technicality. It is the belief that numbers are objects in what is (or ought to be) the ordinary understanding of the term, and it is the product of a deceptively simple train of thought. Objects are what singular terms, in their most basic use, are apt to stand for. And they succeed in doing so when, so used, they feature in true statements. Certain sorts of expression, for instance the standard decimal numerals, and expressions formed by applying the numerical operator, 'the number of…', to a predicate, are used as singular terms in the pure and applied arithmetical statements of identity and predication I which they feature. Many such statements are true. So such terms do have reference, and their reference is to objects[30] (Hale y Wright, 2001: 153).

No obstante, aquí aparecen varios interrogantes: ¿Todos esos números son valores de verdad de una clase? ¿Todos los números tienen un significado? ¿Cómo puedo probar el significado de ese tipo de objetos? ¿Cómo pueden tales tipos de objetos existir si sus significados dependen del contexto de la función? ¿De qué manera las afirmaciones sobre objetos reales conducen a los conceptos de segundo nivel? ¿Cómo se puede pensar la clase y el rango de valores de una función como lo mismo?

## ¿La búsqueda infinita?

La definición fregeana de los números conduce a una paradoja. En primera instancia, las funciones se

30 La creencia de Frege en tanto los números son objetos debe ser descartada como técnica. Es la creencia que los números son objetos en lo que debería ser la comprensión ordinaria del término, y éste es el producto de una cadena desprevenidamente simple del pensamiento. Los objetos son lo que los términos simples, en su uso más generalizado, son aptos para estar. Y ellos son el caso cuando se caracterizan en su uso en oraciones verdaderas. Ciertas suertes de expresiones, por ejemplo, los números decimales estándar, y expresiones construidas aplicando el operador numérico. "el número de..." a un predicado, son usadas como términos singulares en las oraciones aritméticas de identidad y predicación puras y aplicadas que caracterizo. Muchas de estas oraciones son verdaderas. Así, tales términos tienen referencia, y su referencia es a objetos.

pueden entender como relaciones de conjuntos. Los conjuntos son límites para los objetos; los conjuntos establecen un criterio de identidad entre ciertos elementos. Frege considera que el criterio es lo que suele llamar un concepto. Empero, los conceptos tienen una relación inherente con los objetos y, de hecho, de acuerdo con la noción fregeana de objeto, un concepto puede convertirse en un objeto. Por tanto, si se establece la relación entre conceptos y objetos en el contexto de una función, siempre es necesario establecer otro criterio, por ejemplo, en el caso de los conceptos de segundo nivel y la definición de los números. Esto es lo que Russell deja en claro en su famosa carta (Cfr. Beaney, 1996: 230-235). Si se entiende una clase como una función, esto crea un infinito número de funciones, es decir, una paradoja. Empero, por supuesto, esto constituye un problema semántico en el sistema.

La estructura vacía de las funciones establece un límite o una posible conexión a los elementos, pero como función insaturada. Cuando la función se satura, los símbolos neutrales determinan un posible referente o fáctico o formal. La saturación de una función inmediatamente implica la definición de otro concepto, si estamos intentando permanecer en una perspectiva analítica.

De otro lado, como insaturada, una función tiene la siguiente estructura. Los términos categoremáticos constituyen un sustituto de un objeto y los sincategoremáticos se refieren al sentido en palabras de Frege. Sin embargo, tal como él considera, los términos sincategoremáticos son el tribunal de los objetos. La identidad de los objetos depende del sentido de la proposición. Por tanto, el criterio para establecer la identidad de los objetos es su sentido. Y el sentido muestra la posibilidad de la enumeración y, de ese modo, todo objeto puede caer bajo un número. Tal como piensa Frege, esto es captar un pensamiento (Frege, 1984: 355). Captar un pensamiento implica entender el concepto y sus objetos posibles en una función insaturada.

Tal como se puede observar, los elementos del concepto no son el concepto. Los límites del concepto están afuera del concepto. La definición no puede ser dada por los elementos del concepto.

Por consiguiente, captar una estructura lógica no es un asunto de la lógica. Es posible descubrirlo y en ese sentido se debe empezar desde el mundo. Quizá por esa razón Frege (1980: 273-340) regresó al análisis de la geometría al final de su valiente intento de captar la verdad.

## Referencias

Beaney, M. (1996) *Frege: Making Sense*. London: Duckworth.

Beaney, M. (2005) "Frege, Russell and Logicism." In: *Gottlob Frege.* Vol. I. London: Routledge,

Dathe, U. (2005) "Frege in Jena". In: *Gottlob Frege.* Vol. I. London: Routledge.

Dreyfus, H. (1972) *The perpetual Noema*. Evanston: Northestern University Press.

Dummett, M. (1981) *Frege Philosophy of language*. Cambridge: Harvard University Press.

Dummett, M. (2005) "Thought and Perception". In: *Gottlob Frege. Vol. I*. London: Routledge.

Farleane. (2005) "Frege and Kant". In: *Gottlob Frege. Vol. I*. London: Routledge.

Frege, G. (1980) *Foundations of Arithmetic*. Evanston: Northwestern University Press.

Logos, Vol. 1, No. 16 [2009], Art. 3


Frege, G. (1984) "On a Geometrical Representation of Imaginary Forms in the Plane". In: *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*. New York: Basil and Blackwell.

Frege, G. (1984) "Thoughts". In: *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy.* New York: Basil and Blackwell.

Frege, G. (1971) *On the Foundations of Geometry*. London: Yale University Press.

Frege, G. "On Function and Concept". In: *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*. New York: Basil and Blackwell.

Frege, G. "On Concept and Object". In: *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*. New York: Basil and Blackwell.

Frege, G. "On Sense and Meaning". In: *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*. New York: Basil and Blackwell.

Hale, B. and Wright, C. (2001) *The Reason´s Proper Study*. Oxford: University Press.

Husserl, E. (1982) "Letter to G. Frege. Halle. 18.7.1891". In: Mohanty, J. N. Husserl and Frege. Bloomington: University of Indiana Press.

Kant, I. (1998) *Kritik der reinen Vernunf*. Hamburg: Suhrkamp Verlag.

Losonsky, M. (2006) *Linguistic Turns in Modern Philosophy*. Cambridge: Cambridge University Press.

Mill, J. (1973) *A System of logic*. Toronto: UTP, V II.

Mohanty, J. N. (1982) *Husserl and Frege*. Bloomington: University of Indiana Press.

Nedo, M. and Ranchetti, M. (1983) *Wittgenstein*. Frankfurt: Suhrkamp Verlag.

Reck, E. (2005) "Frege's Influence on Wittgenstein". In: Gottlob Frege. Vol. I. London: Routledge.

Russell, B. (1992) *Principles of Mathematics*. London: Routeledge.

Thiel, Ch. and Beaney, M. (2005) "Frege´s life and work". In: *Gottlob Frege.* Vol. I. London: Routledge.

Wittgenstein, L. (1992) *Notebooks 1914-1916.* Edited by G.H. von Wright and G.E.M. Anscombe. Chicago: The University of Chicago Press.

Wittgenstein, L. (1970) *Zettel*. Berkeley: University of California Press.