Métodos visuales para la verificación de argumentos y el análisis semántico*

Visual Methods to Validate Arguments and Semantic Analysis

Alfonso Cabanzo**

Fecha de recepción: 21 de enero del 2011
Fecha de aprobación: 25 de marzo del 2011

Resumen

En este artículo presentaré un método visual, el cual he creado a partir de los tradicionales diagramas de Venn para verificar la validez de argumentos proposicionales y de predicados. Esta idea surge de ver lo útil que es usar métodos visuales en otras ramas de la ciencia, como las representaciones geométricas de conceptos aritméticos y algebraicos. La técnica ilustra la relación entre la lógica de proposiciones, la lógica de predicados y la teoría de conjuntos, y puede usarse también para explicar conceptos de semántica lingüística: hiponimia, hiperonimia, sinonimia, antonimia, implicación, paráfrasis, contradicción y sustitución léxica.

Palabras clave: validez argumentativa, argumentos proposicionales y de predicados, matemática, semántica, método visual.

Abstract

In this paper I will present a visual method that I have created to demonstrate the validity of propositional arguments and predicates, based on the traditional Venn diagrams. This idea was born after becoming aware of how useful visual methods are in other scientific fields, such as geometrical representations of arithmetic and algebraic concepts. This method illustrates the relationship between propositional logic, predicate logic and set theory, and it can be used to explain linguistic semantic concepts such as synonymy, antonymy, hyponymy, entailment, paraphrases, contradiction and lexical substitution.

Keywords: argument validity, propositional and predicate arguments, linguistics, mathematics, semantics.

* El presente texto es un resumen de algunos puntos contenidos en mi libro, próximo a publicarse, sobre lógica formal.

** Filósofo, Universidad Nacional de Colombia. Estudios de Maestría en Filosofía, Universidad Nacional de Colombia. Profesor de lógica y teoría de conjuntos, Universidad del Rosario, y de semiótica y semántica, Universidad de La Salle. Correo electrónico: alcabanzo@unisalle.edu.co.

Logos, Vol. 1, No. 19 [2011], Art. 5

Los métodos visuales y la comprensión

Occidente es una cultura de lo visual. Por ello suele ser cierto que una imagen vale más que mil palabras. No obstante, hay ciertas disciplinas en las que se olvida esto. El apoyo en diagramas, gráficos, dibujos e ilustraciones puede marcar la diferencia entre comprender realmente un concepto y no hacerlo. Uno de los principales problemas en la enseñanza de las matemáticas es el siguiente: en la búsqueda de alejarse de la intuición, los orígenes geométricos de esta han sido olvidados, truncando la comprensión de ramas más avanzadas. Por ejemplo, los números racionales tienen su respectiva representación de la división (figura 1).

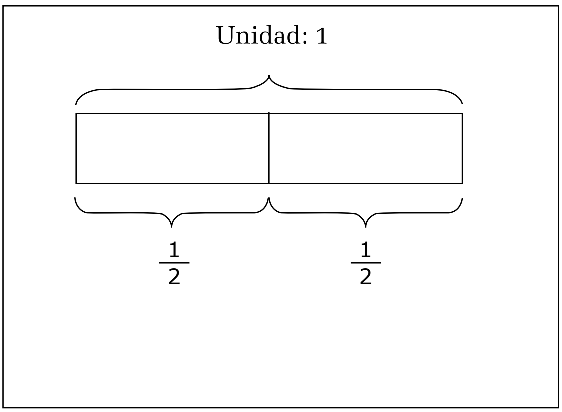


Figura 1. División

Fuente: el autor

Ahora bien, no basta con saber *gráficamente* que 1/2 es realmente la mitad de una unidad. Hay que saber *qué puede hacerse* con tal dato. Las operaciones aritméticas entre fracciones con diferente denominador, por dar una muestra, podrían *comprenderse realmente* si algunos docentes no olvidaran este sencillo hecho. Sumemos las fracciones 1/3 y 1/4. El profesor dirá: sáquese el mínimo común múltiplo, y tómese este como denominador total de la suma; divídase el resultado por el denominador de la primera fracción y multiplíquese por su numerador, y luego repítase la operación con la segunda fracción y súmense ambos resultados. Así, el total sería algo como lo siguiente:

$$\frac{((12 \quad 3) \quad 1)+((12 \quad 4) \quad 1)}{12}=\frac{7}{12}$$

La suma se convierte en la aplicación *mecánica* de una regla, lo cual no tiene nada de malo. Lo malo es que si se le pregunta al estudiante juicioso *qué es lo que ha hecho*, responderá sin dudar: “he sacado el mínimo común múltiplo entre 3 y 4 para tomarlo como denominador de la suma final; lo he dividido por el denominador de la primera fracción y lo he multiplicado por su numerador; luego he repetido la operación con la segunda fracción y he sumado ambos resultados”. Lo anterior es la instanciación de la regla general, un proceso complejo, necesario, pero no *suficiente* para mostrar que se sabe lo que se está haciendo. Refleja una incapacidad de *comprender* el proceso matemático que hay de fondo, porque hacer matemáticas es algo *diferente* a seguir ciegamente reglas; es, en cambio, reconocer relaciones y trabajar con ellas. Desde los griegos, los fraccionarios han sido entendidos como una *relación* entre dos magnitudes, esto es, como una proporción. Tener 1/3 es tomar la unidad y dividirla en tres, y 1/4 es tomar la unidad y dividirla en cuatro, pero más es exactamente es saber que una magnitud cabe tres veces en la unidad. Pedir que encontremos el mínimo común múltiplo entre los dos denominadores de dos fracciones es simplemente tomar la unidad y partirla de nuevo en un número de secciones de manera que podamos tomar una cantidad de las nuevas secciones para que abarquen las tres partes de 1/3, por un lado, y las cuatro partes de 1/4, por otro. Veámoslo gráficamente: en la figura 2 la zona gris representa el tercio de unidad que tenemos. Ahora tomemos 1/4 en la figura 3 la zona en gris oscuro representa el cuarto que hemos tomado.

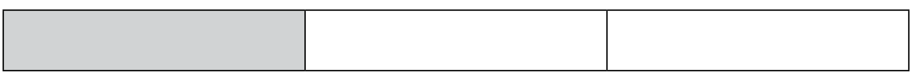


Figura 2. Conmensurabilidad 1

Fuente: el autor

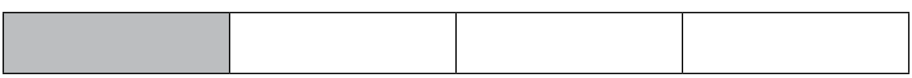


Figura 3. Conmensurabilidad 2

Fuente: el autor

La unidad dividida es la misma en ambos casos. Ahora debemos encontrar una *magnitud común* que quepa tanto en el tercio como en el cuarto. Si dividimos la unidad en doce partes, cada doceavo de parte cabrá un número exacto de veces en la unidad, en el tercio y en el cuarto que tenemos: en el tercio cabrá tres veces, y en el cuarto cabrá cuatro veces, como se ve en la figura 4:

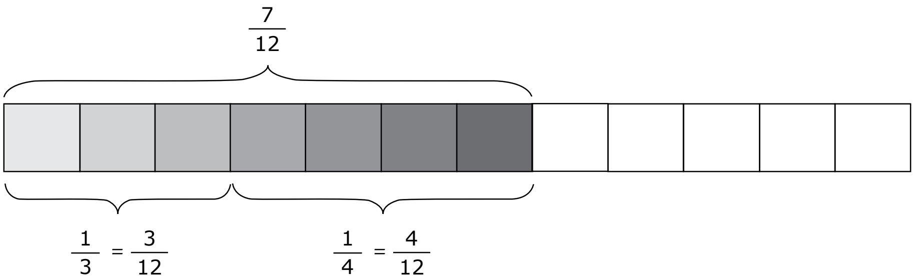


Figura 4. Divisor común

Fuente: el autor

Así, sacar el mínimo común múltiplo entre los denominadores de dos fracciones significa *dividir la unidad en una magnitud conmensurable con las dos fracciones y con la unidad original*. El resultado de hacer esto es la transformación de estas en 3/12 y 4/12, respectivamente, lo que es una simple suma de fraccionarios con igual denominador. Si las sumamos, el resultado es simplemente 7/12, como lo muestra la figura anterior: el total de doceavos de color en gris es.[1]

El anterior no es el único caso que revela cómo pueden comprenderse visualmente conceptos matemáticos. Por ejemplo, muchas expresiones algebraicas son susceptibles de expresarse geométricamente y, sabiendo esto, muchas ecuaciones sencillas pueden comprenderse apelando a estos métodos. El cuadrado de un número a^2 es simplemente el *cuadrado* cuyo lado mide (figura 5):

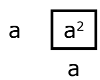


Figura 5. Cuadrado

Fuente: el autor

Según esto, a^2 es una manera abstracta de decir "el cuadrado cuyo lado tiene magnitud a". Por supuesto, $(a + b)^2$ es una forma abreviada de decir: "el cuadrado cuyo lado es $a + b$»". En general, las multiplicaciones representan áreas, de manera que $a \times b$ corresponde a un rectángulo cuyos lados son a y b, respectivamente. La siguiente ecuación, por ende, puede entenderse geométricamente:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

[1] Debo al profesor Gabriel Benítez este ejemplo.

El significado de esta expresión es: "el cuadrado cuyo lado es $a + b$ es el resultado de tomar un cuadrado cuyo lado es a, sumado a dos rectángulos cuyos lados son a y b, sumados a otro cuadrado cuyo lado es b". La representación gráfica (figura 6) no solo nos explica esta ecuación, sino que se convierte en una especie de demostración intuitiva o gráfica.[2]

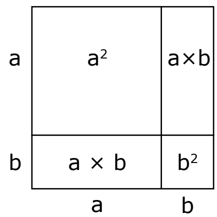


Figura 6. Trinomio cuadrado

Fuente: el autor

Aunque parece trivial, muchas ecuaciones con exponente pueden solucionarse de la misma manera. Por ejemplo, demostremos lo siguiente:

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}$$

Hacemos las operaciones habituales para demostrarlo:

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=$$
$$\frac{(n+1)+2(n+1)}{2}=$$
$$\frac{n^2+n+2n+2}{2}$$

Supongamos por un momento que se nos han olvidado los *productos notables*, de manera que no sabemos si $(n+1)\big((n+1)+1\big)$ es igual a $n^2+n+2n+2$. Según el ejemplo anterior, podemos representar las multiplicaciones como áreas, de manera que hay un gráfico que demuestra tal igualdad, que no es otra que la representación gráfica de un producto notable (figura 7).

---

2 Este ejemplo está tomado de (Kline, 1976), pero la explicación gráfica de sumas y multiplicaciones de números algebraicos también se encuentra en el capítulo VI sobre productos *notables* del *Álgebra* de Baldor (2008, pp. 97-102). Pese a esto, *ningún estudiante de mis clases,* incluyendo estudiantes de ingeniería o ciencias humanas, ha podido responder a la pregunta de lo que significa una ecuación como la anterior. O jamás leen sus libros, o tienen pésima memoria.

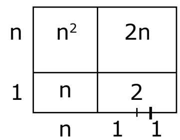


Figura 7. Producto notable

Fuente: el autor

Los métodos visuales, por tanto, no son una curiosidad, sino una herramienta didáctica que posibilitará el aprendizaje y la comprensión de conceptos complejos, evitando una *mera mecanización*, que solo logra que los cerebros de los estudiantes "corten y peguen" a la manera de las máquinas, sin tener ni la menor idea de lo que están haciendo. Por supuesto, este uso de gráficas no remplaza las técnicas más avanzadas, que posibilitan abordar problemas más complejos.[3] Esto revela por qué se habla de *analfabetismo matemático funcional*: los jóvenes pueden aplicar una regla, pero ignoran el significado matemático de los conceptos que usan. Y, por supuesto, ver la aplicación de estos conceptos en el mundo real será, por tanto, muy difícil, si no imposible. Esta conclusión es extensible a la comprensión de textos no matemáticos, de ciencias humanas y literarios: podrán decodificar las palabras leídas, sabiendo *cómo suenan,* pero no entenderán su significado (Cisneros, Olave y Rojas, 2010, p. 27).

Espero que la sección anterior haya ilustrado una manera de hacer más comprensibles las matemáticas básicas mediante métodos visuales.[4] Mi propósito, no obstante, está enfocado a otro campo: el análisis del lenguaje no matemático. Terminado este preámbulo, centrémonos ahora en el objetivo de este artículo: la presentación de un método visual de análisis de argumentos deductivos expresados en lenguaje común.

Métodos visuales, lógica, argumentación y semántica

Lastimosamente, la carrera de Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de La Salle pasa ahora por una reorganización, que es un eufemismo para

---

[3] Podría objetarse que muchos autores defienden el *logicismo*: la matemática se basa en axiomas lógicos. No discuto desde una perspectiva *teórica fundacional,* sino desde una perspectiva didáctica: *qué se debe aprender primero, y cómo se debe enseñar.* Para una discusión sobre los fundamentos lógicos de la matemática ver *Los métodos de la lógica* (Quine, 1981), o bien *El desarrollo de la lógica matemática* (Nidditch, 1995).

[4] Para un análisis sobre los problemas de la enseñanza de las matemáticas ver el ya clásico pero pertinente libro *Por qué Juanito no sabe sumar* (Kline, 1976). Esta obra está dirigida contra la reforma que a mediados del siglo pasado pretendía axiomatizar la enseñanza de las matemáticas en la secundaria en Estados Unidos y Europa, pero es pertinente hoy, pues justamente un modelo similar a ese es el usado actualmente en Colombia.

decir que carece de estudiantes. Ello se debe sin duda a la falta de motivación en la educación primaria y secundaria, haciendo que los jóvenes repudien la matemática, persuadiéndolos de estudiar carreras no relacionadas con esta disciplina, y por tanto frenando el desarrollo científico y tecnológico del país, entre otras cosas, porque *todas las áreas* están relacionadas con las matemáticas. La comprensión lectora y el estudio de la argumentación, necesaria en las ciencias humanas, no son la excepción. Ahora, por fin, presentaré un método visual aplicable a algunos de los espacios académicos básicos dentro de la licenciatura en lengua castellana, inglés y francés, a saber, *comprensión de textos,* y *semántica lingüística*. Me centro en estos dos cursos porque es en ellos en los que se debe revisar explícitamente —y no como parte del currículo oculto— el tema de la *argumentación*, que a su vez está relacionada con la lógica y la teoría de conjuntos.

El problema más importante e irresoluble hasta el momento en teoría de la argumentación sigue siendo el siguiente: ¿cómo lograr que los estudiantes de primeros semestres (y aun avanzados) aprendan sencillamente los rudimentos básicos de lógica y no salgan despavoridos de las clases? Es, al menos, el problema más apremiante en lo tocante a la enseñanza de la argumentación, pues ciertos esquemas lógicos son *necesarios* para entender algunos de los temas dentro del área. Es un problema serio porque, como disciplina, sienta las bases para desarrollar la capacidad de reconocer, evaluar y construir correctamente demostraciones deductivas, y esta es una competencia básica para adquirir las habilidades necesarias para la investigación. Gracias a procesos lógicos el estudiante puede realizar inferencias a partir de la lectura de un texto, lanzar hipótesis para solucionar un problema, y determinar las consecuencias de esta (Cisneros, Olave y Rojas, 2010, p. 20).[5]

Lo que el estudiante debe saber sobre argumentos deductivos se reduce a dos cosas: ¿cuándo un argumento es válido?, esto es, ¿cuándo no puede suceder, bajo ningún caso, que las premisas de un argumento sean verdaderas pero su conclusión falsa? Aunque parece trivial, esta pregunta subyace a toda actividad intelectual e investigativa, pues buscamos siempre razones para aceptar o no una tesis. Otra cosa que el alumno debe saber es: ¿las premisas del argumento válido son verdaderas? Si no lo son, el argumento no es sólido y no es aceptable a pesar de su validez.

El método más sencillo y más eficaz para determinar la validez de un argumento es, hasta ahora, el de las tablas de verdad, introducido de manera independiente por Emil Post y Ludwig Wittgenstein en los inicios del siglo pasado.

5 Aunque hay otros “paradigmas” sobre argumentación, ya he señalado en otro lado que muchas de estas posturas obedecen a una ignorancia respecto a la manera como proceden la lógica y la matemática (Cabanzo, 2010).

Con este método, que consiste en mirar todas las posibles interpretaciones de las fórmulas del argumento, se puede incluso demostrar que las fórmulas que son siempre verdaderas se pueden deducir de un conjunto de axiomas, dadas ciertas reglas de deducción, y no se puede deducir ninguna contradicción, esto es, se puede demostrar que el sistema es *completo*. Lo malo del método es que no se puede ampliar para usarlo en la lógica de predicados. Por ello se implementaron procedimientos como el de los *tableaux* y el de los *árboles de forzamiento semántico*. No obstante, siguen teniendo un inconveniente: los estudiantes se enredan al tratar de desarrollarlos: son casi tan complicados como hacer una deducción. Ahora bien, el método de los diagramas de Venn suele ser usado para representar y aun para probar ciertos argumentos de predicados: aquellos que tienen la forma aristotélica clásica, con relaciones entre tres premisas, con dos términos cada premisa y tres términos en total. El método es eficiente, y tiene la ventaja de ser visual: una vez el estudiante se ha familiarizado con las convenciones, se ve inmediatamente que si las premisas se representan de manera correcta, la conclusión aparece automáticamente, aunque hay que interpretar el gráfico. No obstante, no se usa para demostrar silogismos hipotéticos y disyuntivos. Propongo una unificación del método de manera que con unas mismas convenciones se puedan demostrar tanto argumentos aristotélicos como argumentos hipotéticos y disyuntivos. Otro uso de estos diagramas se relaciona con lo que los lingüistas llaman *semántica lingüística*: el estudio de las relaciones semánticas entre las palabras y las oraciones. Mediante estos métodos gráficos podremos sistematizar la enseñanza de dichos conceptos. Veamos primero la aplicación en la argumentación y posteriormente en la *semántica lingüística*.

Representación gráfica de las proposiciones

El álgebra de conjuntos, o los esquemas booleanos, permiten interpretar las fórmulas de lenguajes lógicos en términos de relaciones entre conjuntos y, por tanto, permite graficarlas. Los diagramas de Venn posibilitan probar argumentos aristotélicos de manera eficiente y fácil de entender. Lo que haré a continuación será proponer un método estandarizado de pruebas de argumentos proposicionales y algunos de predicados, de manera que el estudiante pueda demostrar esquemas de argumentos que tengan tres términos, o que relacionen tres proposiciones mediante condicionales, conjunciones o disyunciones. Para ello primero explicaré las convenciones y, luego, la manera como se usarán.[6]

[6] Hay, por supuesto, otros métodos. la propuesta por mi presentada tiene las siguientes ventajas: uniformidad y simplicidad.

La lógica proposicional representa proposiciones simples relacionadas mediante los conectores lógicos $\neg$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$. Respectivamente, significan “no”, “entonces”, “o”, “y”, “si y solo si”. La lógica de primer orden representa proposiciones con estos mismos conectores, pero atendiendo a su estructura interna de la forma sujeto-predicado y a los cuantificadores “todo”, representado como $\forall$ y “algún”, representado como $\exists$. La teoría de conjuntos relaciona en cambio conjuntos mediante los operadores $\in$, $\cup$, $\cap$, $\subseteq$, $=$, además de los tradicionales. Hay un paralelismo entre las fórmulas de los tres lenguajes, de manera que podemos representar fórmulas de los tres mediante los mismos diagramas. Así, la proposición “los mamíferos son vertebrados” puede representarse como “si es mamífero entonces es vertebrado”, como “todos los mamíferos son vertebrados” y como “la clase de los mamíferos está contenida en la clase de los vertebrados”. Respectivamente, quedaría formalizada así: $M \rightarrow V$, $\forall x\ (Mx \rightarrow Vx)$ y $M \subseteq V$ La negación $\neg P$ se representa igual en la lógica de proposiciones y de primer orden, pero en la de conjuntos corresponde al complemento $\overline{P}$ que hace alusión a *todo lo que no es P.* Así como en la demostración gráfica de los silogismos mediante los diagramas de Venn, usaré al menos dos conjuntos, con el fin, entre otras cosas, de poder representar el complemento. Además, solo utilizaré dos tipos de signos: las rayas, que significan *vacío*, y el punto, que significa *no vacío*. Esta convención es tremendamente importante, pero causa confusión. Algunos estudiantes suelen confundirse cuando ven las rayas, pensado que significan que seleccionamos todos los elementos que hay allí, cuando realmente significan que *no hay elementos en dicho conjunto.* De hecho, en otros tipos de diagramas de Venn, la unión se representa exactamente *sombreando* (no *rayando*) todo lo que queremos unir, pero aquí no sombrearemos nada. El motivo para adoptar esa forma de representar el vacío —mediante rayas— es que así se garantiza que la diagramación sirva como método de *prueba*. Para ello se debe primero saber cómo representar cada proposición. Asumiré que cada una de ellas es un conjunto. Representaremos, como dije, el no vacío con un punto. Con fines ilustrativos usaré una flecha que sale del punto, que indicará que este puede ponerse dentro de cualquiera de las zonas blancas por donde pasa, pero no en una zona rayada. Si esto llega a suceder, es decir, si el punto queda ubicado en una zona rayada, se dice que el diagrama es *inconsistente*. Antes de iniciar la presentación de los diagramas, daré unas *reglas de rayado* que serán útiles para desarrollar los diagramas sin equivocarse:

a) Identifique claramente los conectores: *negaciones, conjunciones, disyunciones, condicionales* y *bicondicionales*. Identifique antecedentes y consecuentes, conyuntos (los componentes de una conjunción) y disyuntos (los componentes de una disyunción).

b) Identifique cuantificadores: *todos, ningunos, algunos, existe.*
c) Tenga en cuenta que la negación de P es $\neg P$, pero también que la negación de $\neg P$ es P pues $\neg\neg P$ equivale a P. Identifique la aparición en un mismo texto de oposiciones como *pasar/perder, inútil/útil*, que disfrazan negaciones y afirmaciones de la misma proposición.
d) Raye siempre primero proposiciones universales, condicionales, negaciones de disyunciones y negaciones de existenciales; después las proposiciones particulares, conjunciones, negación de condicionales y negación de disyunciones. Así evitará caer en falsas inconsistencias.
e) La diagramación de un argumento como premisa unida a la negación de la conclusión dará como resultado *siempre* uno, y solo un punto existencial en el diagrama, nunca más de uno.
f) Siempre debe negar la conclusión. Tenga en cuenta la regla *c*.
g) Si el argumento tiene más de tres términos o relaciona más de tres proposiciones que en total suman más de tres términos, no se puede graficar mediante estos métodos (o al menos es muy engorroso hacerlo). Si esto es así, pruebe con los métodos tradicionales.

Veamos entonces la representación de las fórmulas más usuales con dos términos. Presentaré la formulación con la notación de la lógica de proposiciones en la parte superior de este, abajo la notación conjuntista, y cuando sea el caso la notación de la lógica de primer orden. Afirmar la *proposición simple P* es lo mismo que decir que P no es vacío (figura 8). Debe haber un punto (y solo uno) en el diagrama; en este caso se encuentra dentro de P. Decimos que es equivalente a $\neg\neg P$.

Hablando en términos conjuntistas, P es igual al complemento del complemento, es decir, $\overline{\overline{P}}$. Por ello este diagrama sirve para representar ambas fórmulas. El punto que representa el no vacío puede ponerse en cualquiera de las regiones en blanco, dentro de la frontera de P, hecho que se representa mediante la flecha.

La representación de $\neg P$ (no P) se hace justamente dejando vacío al conjunto P y en blanco el *complemento* de este (figura 9).

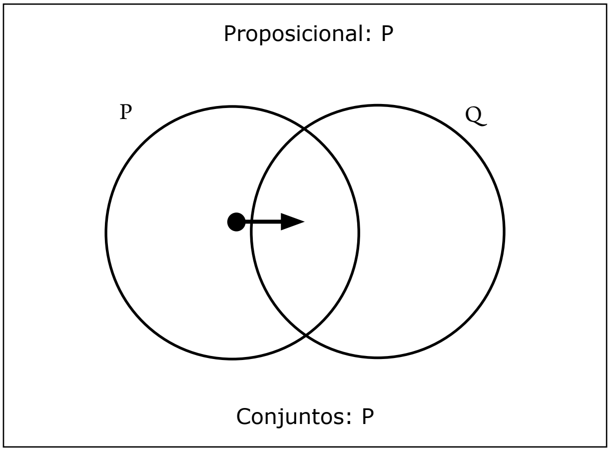


Figura 8. Proposición simple

Fuente: el autor

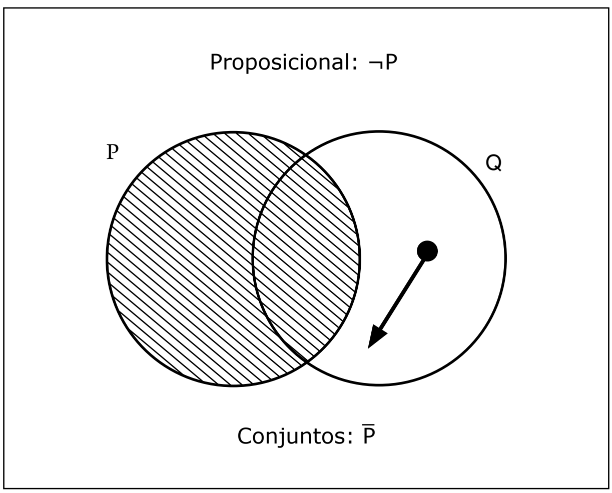


Figura 9. Negación

Fuente: el autor

La representación de $P \wedge Q$ (*P* y además *Q*) es muy sencilla: un punto en la intersección entre *P* y *Q* es decir, $P \cap Q$. En notación de lógica de primer orden, corresponde a $\exists x$ (*Px* $\wedge$ *Qx* (algo es al mismo tiempo *P* y *Q*), es decir, la proposición particular afirmativa en lógica aristotélica (figura 10).

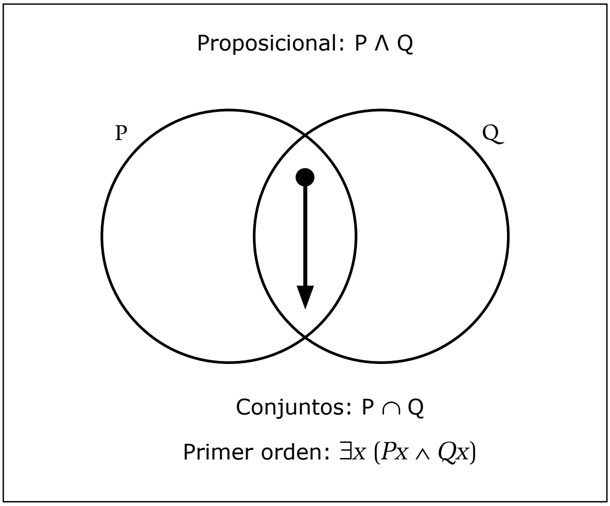


Figura 10. Conjunción

Fuente: el autor

Ahora representaremos la fórmula $P \vee Q$ (P o Q). En términos conjuntistas es una *unión* $P \cup Q$, de manera que consideramos los elementos de P o los de Q. Esto se representa mediante la flecha que parte de un conjunto para llegar al otro (figura 11).

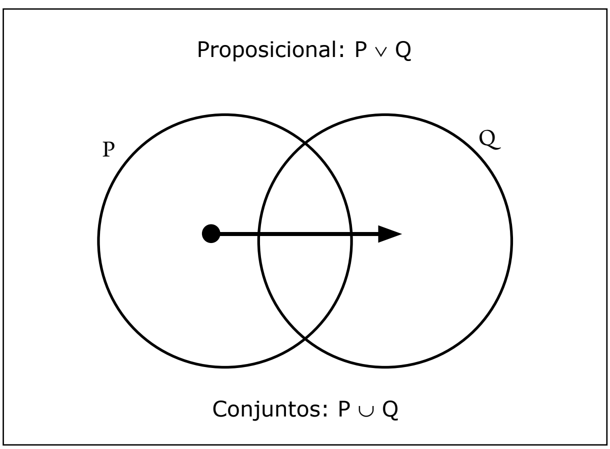


Figura 11. Disyunción

Fuente: el autor

La representación del condicional $P \rightarrow Q$ (si P entonces Q) es de especial atención. Dejamos vacío todo lo que es P que no es Q y todo lo demás lo dejamos en blanco (figura 12). Esta zona se llama lúnula, pues, de hecho, parece una media luna.

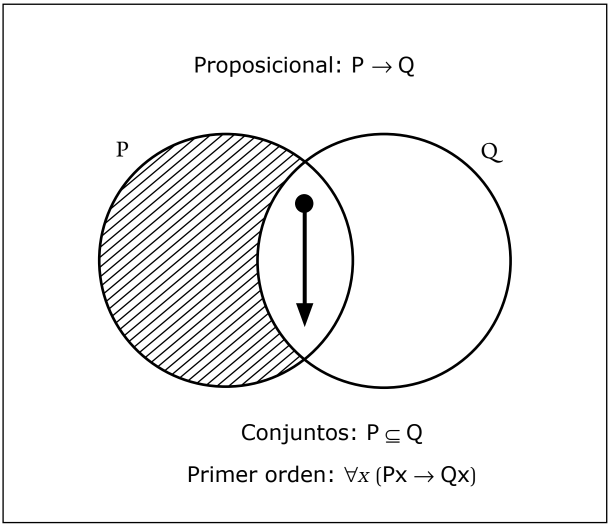


Figura 12. Condicional

Fuente: el autor

La notación conjuntista del condicional es la siguiente: $P \subseteq Q$ (P está contenido en Q). Ello porque la inclusión se define justamente mediante un condicional: $x \in P \rightarrow x \in Q$ (si x pertenece a P, entonces x pertenece a Q). En lógica de primer orden la proposición es una categórica aristotélica: "todo P es Q" se representa como $\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$ *universal afirmativa*, cuya representación coincide con las proposiciones condicionales.

Las negaciones de las fórmulas anteriores son un *negativo fotográfico* de sus diagramas. En el siguiente caso, $\neg\ (P \wedge Q)$ consideramos todo lo que no esté en la intersección entre P y Q (figura 13). Esta expresión corresponde con la proposición $\neg\ \exists x\ (Px \wedge Qx)$ (no es el caso que algo sea simultáneamente P y Q) y transformada a forma normal, corresponde con $\forall x\ (Px \rightarrow \neg\ Qx)$ (ningún P es Q), es decir, con la proposición universal negativa aristotélica:

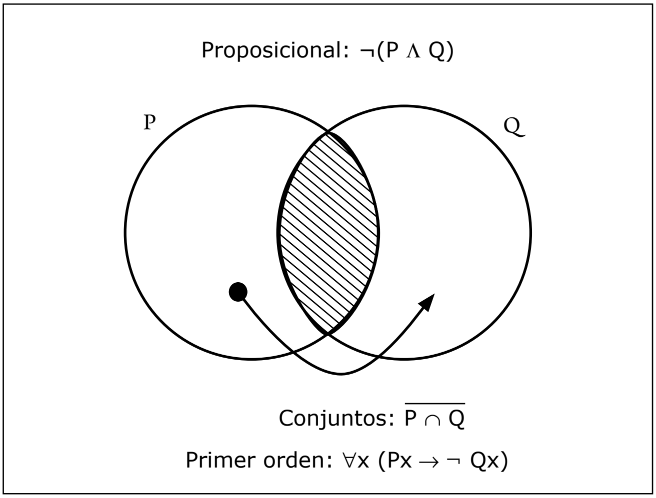


Figura 13. Negación de la conjunción

Fuente: el autor

La disyunción negada, $\neg\ (P \vee Q)$ corresponde al complemento de la unión entre P y Q (figura 14). Por ello, consideramos todo lo que no pertenezca a dicha unión, que debemos rayar totalmente:

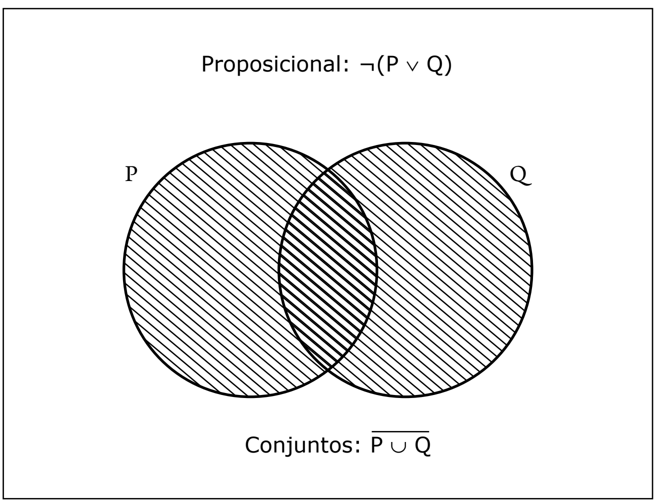


Figura 14. Negación de la disyunción

Fuente: el autor

En el condicional negado, $\neg (P \rightarrow Q)$ corresponde al complemento del resultado de incluir P en Q, es decir, $\overline{P \subseteq Q}$. Así mismo, corresponde a la negación de la proposición universal afirmativa, $\neg \forall x (Px \rightarrow Qx)$, que es equivalente a $\exists x (Px \wedge \neg Qx)$. Saber esto es especialmente útil: siempre que nos encontremos con un condicional negado $\neg (P \rightarrow Q)$, asumiremos que es equivalente a $P \wedge \neg Q$ (figura 15).

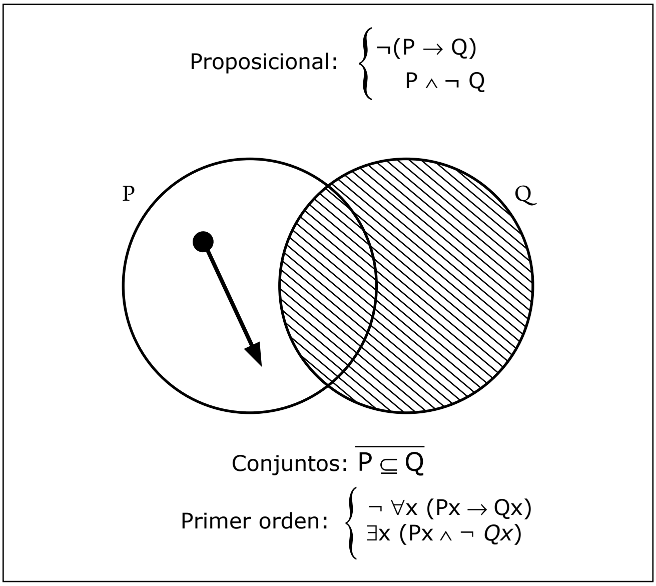


Figura 15. Negación del condicional

Fuente: el autor

Verificación de argumentos

Una vez definidas las proposiciones anteriores, necesitamos un método que garantice la efectividad de la prueba de validez. A diferencia de las pruebas para argumentos silogísticos, optaremos por una demostración de tipo *indirecto,* es decir, supondremos que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa; si el diagrama resultante es *inconsistente*, el argumento será *válido.*[7] La razón para hacer esto es la sencillez. En efecto, si usamos una prueba directa, el diagrama final debe ser *interpretado* por el estudiante, y en este proceso puede llegar a fallar.

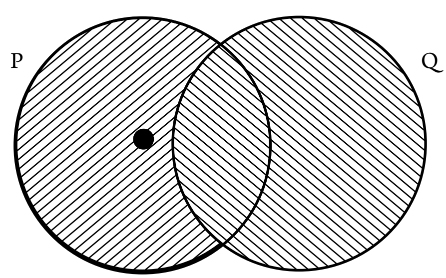
[7] Para una presentación del método tradicional de diagramas de Venn para verificar silogismos, ver Quine (1981, pp. 118-134), quien presenta una manera de diagramar proposiciones disyuntivas diferente a la de los silogismos tradicionales —y diferente a la aquí propuesta—.

Con el método indirecto podemos unificar las convenciones para demostrar argumentos disyuntivos e hipotéticos y generalizar los resultados del método hasta el punto de reglamentar todo el proceso, garantizando la correcta ejecución de la técnica. Sumado a su carácter visual, se convierte en una poderosa herramienta de enseñanza. Continuando con el tema, si el diagrama resulta *consistente*, el argumento será inválido. Aquella zona del diagrama donde aparezca un punto corresponderá al *contraejemplo* del argumento inválido, es decir, la interpretación que hace verdaderas las premisas pero falsa la conclusión. Como se recordará, la inconsistencia radica en que una misma región esté, simultáneamente, vacía y no vacía. Probemos, por ejemplo, el *modus tollens:*

$$\begin{array}{c} P \rightarrow Q \\ \underline{\neg\, Q} \\ \neg\, P \end{array}$$

Para hacer tal cosa debemos suponer que se dan las premisas pero la conclusión es falsa. Si el diagrama es inconsistente, es decir si $P \rightarrow Q$, $\neg\, Q$ unido a P es *insatisfacible* (si su diagrama es inconsistente), por ser la negación de lo que queremos demostrar, el argumento $P \rightarrow Q; \neg Q \vdash \neg\, P$ será válido (figura 16).

En este caso, representamos $P \rightarrow Q$ rayando la lúnula de P como vacía, mediante las rayas diagonales ascendentes que van de izquierda a derecha; $\neg\, Q$ se representa rayando todo el conjunto Q; P, que corresponde a la negación de la conclusión P (recuérdese que P es equivalente a $\neg\neg P$) se representa con un punto en P. Este queda en una región rayada, el diagrama es *inconsistente* y, por tanto, el argumento es *válido*.



$P \rightarrow Q; \neg Q \cup \{P\}$ es inconsistente. Por tanto $P \rightarrow Q; \neg Q \vdash \neg P$ es válido

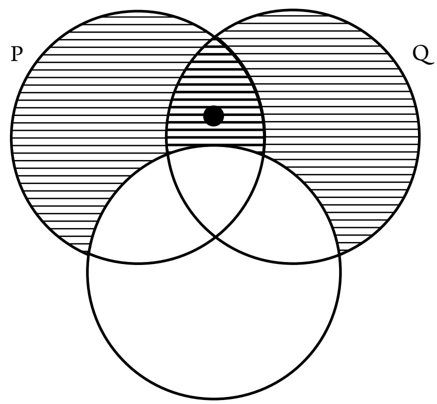
Figura 16. *Tollendo tollens*

Fuente: el autor

Puede hacerse la prueba para las reglas primitivas de la lógica de proposiciones, con algunas modificaciones:

a) La reducción al absurdo se remplaza por el *modus tollens*.
b) El *teorema de deducción* se remplaza por una versión sintáctica:
   $(P \vee Q \rightarrow \mathrm{R}) \vdash \big(P \rightarrow (Q \rightarrow R)\big)$
c) La *eliminación de la disyunción* coincide con el dilema constructivo:
   $P \vee Q; P \rightarrow R; Q \rightarrow R \vdash R$

Puede demostrarse así la validez de cada regla de inferencia primitiva. Probemos la versión sintáctica del teorema de deducción. Para ello suponemos que se dan las premisas pero no la conclusión, y si el diagrama es inconsistente, el argumento sería válido (figura 17).



$\mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R} \cup \{\neg\ (\mathrm{P} \rightarrow (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}))\}$ es inconsistente, por tanto

$(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}) \vdash (\mathrm{P} \rightarrow (\mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}))$ es un esquema válido

Figura 17. Teorema de deducción

Fuente: el autor

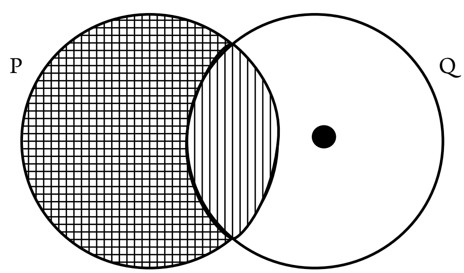
Hemos representado mediante rayas horizontales el condicional $P \vee Q \rightarrow R$ dejando vacío todo lo que es P o Q que no sea R. Luego representamos la negación de la conclusión, es decir $\neg\ \big(P \rightarrow (Q \rightarrow R)\big)$ Como vimos en el numeral 2.1, la negación del condicional es igual a la conjunción del antecedente y la negación del consecuente, de manera que representar esta conclusión negada es equivalente a representar $P \wedge Q \wedge \neg R$.

El punto existencial debe ponerse fuera de *R*. Pero previamente todas estas regiones han quedado vacías; al poner el punto notamos inmediatamente la inconsistencia, y como no se pueden satisfacer las premisas unidas a la negación de la conclusión, el argumento es válido.

Verifiquemos ahora el siguiente argumento:

$$P \rightarrow Q; \neg P \vdash \neg Q$$

Representaremos $P \rightarrow Q$, $\neg P$ y Q, y pues debemos negar la conclusión. Primero representamos $P \rightarrow Q$, dejando vacía la lúnula de *P*, mediante las rayas horizontales. Luego representamos $\neg P$, dejando vacío el círculo correspondiente a *P*, mediante rayas verticales. Nótese cómo se superponen ambos rayados dejando una maya en la lúnula. Finalmente, representamos *Q* (la negación de $\neg Q$) poniendo un punto dentro de *Q* pero fuera de *P*. No hay inconsistencia, de manera que el argumento es inválido (figura 18).



$P \rightarrow Q;\ \neg P \cup \{Q\}$ es consistente, por tanto $P \rightarrow Q;\ \neg P \vdash Q$ es inválido

Figura 18. Falacia de negación del antecedente

Fuente: el autor

La invalidez queda probada debido a que $P \rightarrow Q$ es verdadero, $\neg P$ es verdadero, y no obstante algo puede ser *Q* sin problemas, como se ve por el hecho de que hay un punto dentro del conjunto *Q*. Este punto se convierte en el *contra ejemplo* del esquema. Una gran ventaja de este método es que no requiere, en principio, una formalización compleja para verificar argumentos del lenguaje común. Basta con aprender a representar ciertas expresiones del lenguaje cotidiano mediante los diagramas.

$P \rightarrow Q;\ \neg P \cup \{Q\}$ es consistente, por tanto $P \rightarrow Q;\ \neg P \vdash Q$ es un inválido

Por ejemplo, supongamos que nos topamos con el siguiente argumento:

El significado no puede ser un concepto mental. Si lo fuese, nunca podríamos entender lo que alguien nos quiere decir mediante las palabras, pero lo cierto es que lo entendemos.

La conclusión, lo que nos están pidiendo aceptar como verdadero es:

a) *El significado no puede ser un concepto mental.*

Las razones para justificar esto, es decir, las premisas, serían:

1) *Si el significado es un concepto mental, entonces no podría entenderse lo que una persona trata de decir mediante las palabras.*
2) *Puede entenderse lo que una persona trata de decir mediante las palabras.*

La manera tradicional de entender una proposición como 1 es asumiendo que tiene la forma "todo *P* es *Q*". Pero esto haría imposible verificar el argumento con los métodos de los diagramas de Venn tradicionales. En efecto, la proposición 2 no es una proposición categórica aristotélica, sino una proposición hipotética.

Lo que tenemos que hacer es asumir el antecedente de la premisa 2 como un solo término (*el significado es un concepto mental*) representado como un conjunto completo, y su consecuente (*no podría entenderse lo que una persona trata de decir mediante las palabras*) como otro conjunto completo (figura 19).

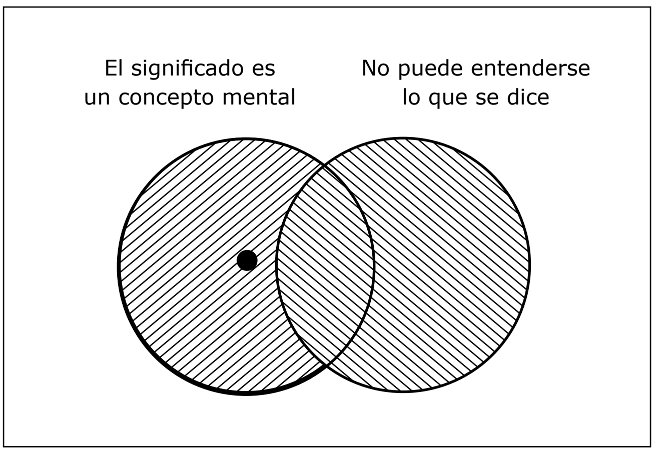


Figura 19. Argumento de lenguaje común

Fuente: el autor

Debemos ignorar esta negación. Luego se procede a representar la proposición 3 y la negación de la conclusión, esto es, la negación de 1. Si el diagrama es inconsistente, el argumento será válido. La rayas diagonales que van de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo en la lúnula del conjunto izquierdo representan el condicional 2: *si el significado es un concepto mental entonces no podría entenderse lo que una persona trata de decir mediante las palabras*. Las rayas diagonales, que rayan todo el conjunto derecho, representan la proposición 3: *puede entenderse lo que una persona trata de decir mediante las palabras*. Como el conjunto representa de lo que *no* puede entenderse cuando se dice, la proposición es la negación, y por tanto se raya el conjunto entero. El punto en el conjunto de la izquierda corresponde a la *negación* de la conclusión 1. *no es el caso que* "*el significado no puede ser un concepto mental*", que es justamente lo mismo que decir *el significado es un concepto mental*. Esta es una afirmación, y por ello se pone el punto existencial. Como el diagrama es inconsistente, el argumento es válido. Para alguien versado en lógica proposicional será evidente que el argumento es un *modus tollens*. Para alguien que no sepa esto, el diagrama, sin necesidad de aprenderse esquemas, muestra que la conclusión se sigue de las premisas, pues de no suceder ello llegaríamos a un absurdo: el conjunto *del significado es un concepto mental* estaría simultáneamente vacío y no vacío.

Como el ejemplo anterior muestra, la principal ventaja del uso de estos diagramas de Venn modificados es la siguiente: el estudiante no tiene que aprenderse de memoria los esquemas proposicionales como el *modus ponens, modus tollens,* silogismo hipotético, etcétera. Basta con que aprenda a representar gráficamente condicionales, negaciones, disyunciones y conjunciones para que pueda verificar por sí mismo argumentos que utilicen este tipo de proposiciones. Ello significaría básicamente lo siguiente: bien aplicado, el método permitirá que no se confunda el esquema que corresponde a la falacia de negación del antecedente ($P \rightarrow Q$; $\neg P \vdash \neg Q$) con un esquema válido, puesto que bastaría con que el estudiante lo verifique mediante los diagramas. Muchas veces sucede en clase que los alumnos aprenden mal el esquema del *modus tollens,* de manera que terminan asumiendo que es igual a la falacia anterior. Como el método de las tablas de verdad suele ser engorroso, no verifican el razonamiento, confiando en su memoria. Este método, al ser visual, garantizará mayor comprensión de los errores de este tipo, y ayudará a encontrar contraejemplos. Sucede lo mismo que con los métodos gráficos en matemática: los dibujos no remplazan la factorización, pero pueden ayudar a aumentar la comprensión y solucionar confusiones.

Aplicaciones en semántica lingüística

El procedimiento mostrado en el numeral anterior está pensado para aplicarse en la enseñanza de la lógica formal, e incluso en cursos de argumentación informal, ya que no requiere un dominio total de las técnicas clásicas de formalización. Precisamente por ello puede ampliarse su uso a cursos como los de comprensión y producción de textos y semántica lingüística. En efecto, conceptos como hiponimia, hiperonimia, sinonimia, antonimia, implicación y paráfrasis pueden entenderse con estos métodos, así como el de la sustitución léxica, todos necesarios para entender temas como la *coherencia* y la *cohesión* (Van Dijk, 2005). Incluso conceptos como la *elisión* pueden ser fácilmente comprendidos una vez se ha mecanizado el uso de estos diagramas al tiempo que se explica el concepto de implicación. Veamos brevemente los usos de estos métodos con cada una de estas nociones.

Hiponimia, hiperonimia, sinonimia y antonimia

Podemos definir el concepto de hiponimia mediante la teoría de conjuntos: un término[8] *A*» es hipónimo de un término *B*» si y solo si la extensión del conjunto de los *A* está contenida en la extensión del conjunto de los *B*. De igual forma, «*A*» es hiperónimo de «*B*» si y solo si el conjunto de los *A* contiene al conjunto de los *B*.[9] La extensión del conjunto denotado por un término es cada uno de los objetos que pertenecen al conjunto. En caso de que se quiera trabajar con unicornios, centauros o políticos honestos, términos cuya extensión es nula (el conjunto denotado por el término es el conjunto vacío), la extensión del conjunto denotado por un término será cada una de las *unidades culturales* que pertenecen a dicho conjunto (Eco, 1991, pp. 100-104). De acuerdo con aquellas dos definiciones, *pekinés* es hipónimo de *perro* porque la extensión de *pekinés* está contenida en la extensión de *perro*. Inversamente, *perro* es hiperónimo de *pekinés* porque la extensión de *perro* contiene o incluye a la de *pekinés* (figura 20).

[8] Lexema, para usar una terminología típica de lingüistas, definido como la mínima unidad con sentido en una oración (Kreidler, 2002). No obstante, entiendo el concepto término de manera más amplia, pues según lo anterior puede abarcar toda una proposición que funcione como el antecedente de un condicional.

[9] Hablaré indistintamente de la extensión del término «A», entre comillas latinas, para abreviar la extensión de "el conjunto denotado por «*A*»". Usaré la expresión "*A* está contenido en *B*" para abreviar la expresión "La extensión del conjunto *A* está contenida en la extensión del conjunto *B*".

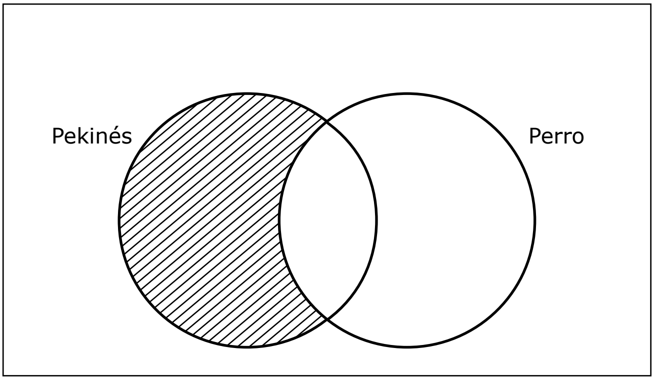


Figura 20. Relación de hiponimia

Fuente: el autor

Se ve que todo aquello que pertenezca al conjunto de los pekineses pertenecerá sin duda al conjunto de los perros. El lector perspicaz ya habrá notado que esta es la representación de otras tres expresiones: en notación de teoría de conjuntos, $A \subset B$;[10] en notación de lógica de proposiciones, $A \rightarrow B$, y en notación de lógica de predicados, $\forall x\,(Ax \rightarrow Bx)$. Ello es así no por un extraño error de la diagramación, sino porque las siguientes expresiones resultan ser equivalentes, o paráfrasis la una de la otra:

a) *Pekinés* es hipónimo de *perro*.
b) El conjunto de los pekineses está contenido propiamente en el de los perros ($A \subset B$).
c) Si es *pekinés* entonces es *perro* ($A \rightarrow B$).
d) Todo *pekinés* es *perro* $\big(\forall x(Ax \rightarrow Bx)\big)$.

En resumen, podemos dar una definición de hiponimia formal, usando la notación de la teoría de conjuntos:

A es hipónimo de B si y solo si $A \subset B$.
A es hiperónimo de B si y solo si $A \supset B$.
A es sinónimo de B si y solo si $A = B$.
A es antónimo de B si y solo si $A \cap B = \varnothing$.

[10] En este caso uso la inclusión propia $\subset$, definida como $A \subseteq B$ & $A \neq B$. En conjuntos, si A está incluido en B puede suceder que A sea igual a B. Esta opción, sin embargo, no puede usarse en la definición de hipónimo, pues claramente si A es hipónimo de B, A no es igual a B: B tiene al menos un elemento más que A.

En el caso de la sinonimia, la extensión de los términos ha de ser idéntica. En el de la antonimia, las extensiones son disyuntas dos a dos. El lector puede hacer el diagrama de estas dos últimas relaciones semánticas. Ahora bien, armados de estos conceptos, podemos explicar la semántica de los términos cuando aparecen ya en las oraciones.

Implicación, paráfrasis y elisión

En el parágrafo anterior explicamos mediante los diagramas lo relacionado con lo que los lingüistas llaman la semántica de la palabra. Ahora veremos lo que se denomina semántica de la oración.[11] Los conceptos básicos son la implicación y la paráfrasis o, como la llaman los lógicos, la *equivalencia*. La implicación se define así: l*a oración A implica la oración B si y solo si no hay una interpretación que haga a A verdadera y a B falsa.* La paráfrasis se define así: *la oración A es una paráfrasis de B si y solo si la interpretación de A es igual a la interpretación de B.* Ambos conceptos están relacionados con la argumentación deductiva, y por tanto su comprensión está ligada a esta. En efecto, un argumento es válido cuando no hay una interpretación que haga verdaderas las premisas y falsa la conclusión. La *interpretación* aquí la dimos en términos del *diagrama*: si al representar las premisas y la negación de la conclusión el resultado es *inconsistente*, el argumento es *válido*. Ahora bien, en términos de la semántica veritativo-funcional, un argumento es válido si y solo si sus premisas *implican su conclusión*. Representemos mediante diagramas la relación semántica siguiente:

Los perros son mamíferos ⇒ Los pekineses son mamíferos

Asumiré que aquí la flecha doble se lee “implica”. De hecho, parece que esta no es una implicación lógica verdadera, si la analizamos en términos de la lógica de predicados. No obstante, es una implicación intuitivamente obvia: no puede suceder que sea verdad que los perros sean mamíferos y que sea falso que los pekineses sean mamíferos. Esto se debe a que hay cierta información *extra lógica* que el usuario conoce y a partir de la cual determina la implicación. Pero no debemos asustarnos ante tal conclusión, ni afirmar que la lógica no basta para explicar el uso del lenguaje. Simplemente apelamos al concepto de *elisión*. La elisión la definimos como la supresión de un término o de un enunciado obvio y relevante para la comprensión total del texto analizado o, como lo llamó Aristóteles, *entimema*. En este caso, se suprime una premisa necesaria para la validez de la implicación. En efecto, hay una *premisa elidida*, cuyo olvido en el análisis causa la impresión de invalidez de la implicación analizada. En este caso es la siguiente:

[11] Más exactamente, semántica de la proposición, pero seguiremos usando los términos usuales entre lingüistas.

Los pekineses son perros

Todo el argumento queda pues como sigue:

Los perros son mamíferos & Los pekineses son perros
$\Rightarrow$ *Los pekineses son mamíferos*

La verificación gráfica del mismo se hace más sencilla, relacionando los *tres* términos:

Perro $\subset$ *mamífero & pekinés* $\subset$ *perro* $\Rightarrow$ *pekinés* $\subset$ *mamífero*

Para la verificación simplemente representamos las premisas y la negación de la conclusión. Recuérdese que la negación de "*pekines* $\subset$ *mamífero*" es simplemente "*Pekines* & *no mamífer*o".

Si el diagrama es inconsistente, el esquema de argumento será válido y habremos determinado que la oración "los perros son mamíferos" implica la oración "los pekineses son mamíferos" (figura 21). El punto en el conjunto de los pekineses representa la negación de la conclusión: algo es pekinés y no es mamífero. Es, por supuesto, un diagrama inconsistente, lo que demuestra la validez del esquema y por lo tanto de la implicación.

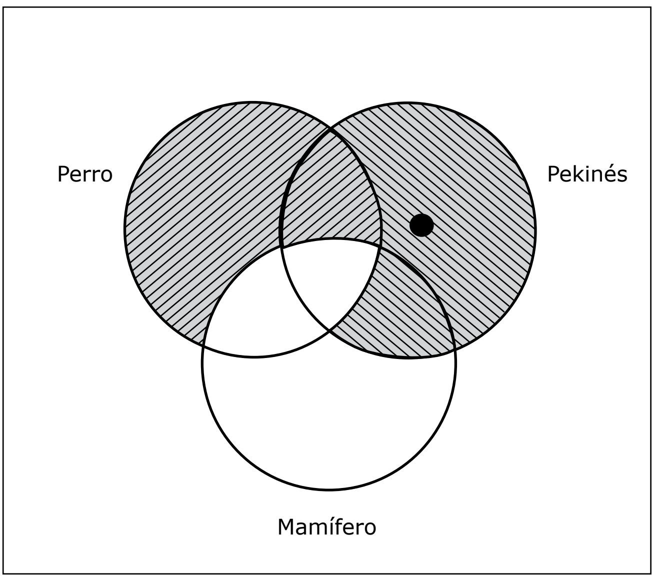


Figura 21. Relación de implicación

Fuente: el autor

Visto lo anterior podemos introducir ahora el concepto de *sustitución léxica.* Básicamente consiste en que dado un término que aparece en una oración, este se cambia por su hipónimo, por su hiperónimo, su sinónimo o su antónimo. Este hecho lleva a que la oración original y la resultante estén relacionadas semánticamente de la siguiente manera:

Implicación

- Si en una oración "*A* es *B*" el término *A* es sustituido por su hipónimo *C*, la oración "*A* es *B*" implica a la oración resultante "*C* es *B*".
- Si en una oración "*A* es *B*" el término *B* es sustituido por su hiperónimo *C*, la oración "*A* es *B*" implica a la oración resultante "*A* es *C*".

Paráfrasis o equivalencia

- Si en una oración "*A* es *B*" el término *A* es sustituido por su sinónimo *C*, la oración "*A* es *B*" es parafraseada por la oración resultante "*C* es *B*". También decimos que la oración resultante es *equivalente* a la original.
- Si en una oración "*A* es *B*" el término *B* es sustituido por su sinónimo *C*, la oración "*A* es *B*" es parafraseada por la oración resultante "*A* es *C*".

Contradicción

- Si en una oración "*A* es *B*" el término A es sustituido por su antónimo *C*, la oración "*A* es *B*" es contradictoria con la oración resultante "*C* es *B*".

Así, si en la oración "los humanos son animales" sustituyo "humano" por su hipónimo "hombre", la oración inicial "los humanos son animales" implica la oración resultante "los hombres son animales". Si en la oración "los humanos son animales" sustituyo el término "animales" por su hiperónimo "ser vivo", la oración "los humanos son animales" implica a la oración resultante "los humanos son seres vivos". Si en la oración "los humanos son animales" sustituyo el término "humanos" por su sinónimo "persona", la oración resultante "las personas son animales" es una paráfrasis de la oración original. Finalmente, si en la oración "los hombres son machos" sustituimos "hombres" por su antónimo "mujeres" obtenemos una contradicción, o una declaración radical de género sobre el empoderamiento de la mujer. Ahora bien, aquella contradicción no es exactamente idéntica a la contradicción lógica de la forma $P \wedge \neg P$, ni aun a la contradicción aristotélica $\forall x\,(Px \rightarrow Qx) \wedge \exists x\,(Px \wedge \neg Qx)$, pero siendo así llamada por los lingüistas, continuaremos su tradición (Kreidler, 2002). Con este método hemos visto cómo representar gráficamente estos conceptos usados en la semántica lingüística. Pero además hemos descubierto algo: la estrecha relación entre la semántica de las palabras (términos o lexemas) y la semántica de la oración: son en el fondo lo mismo, pues solo en el contexto de la oración adquieren las palabras su sentido.

Conclusiones: problemas y ventajas del método

Este método, si bien ayuda a *entender* por qué son válidos ciertos esquemas y otros no, no remplaza el estudio juicioso de la lógica; es un apoyo, una ayuda. Por otro lado, con estos procedimientos solo se puede probar la validez de argumentos de tres variables proposicionales, y aunque una porción de argumentos de la lógica de predicados puede ser probada mediante estos métodos, una porción mayor que la demostrable con diagramas tradicionales de Venn, otros esquemas no son susceptibles de prueba a menos que se impongan restricciones y clausulas *ad hoc*. Por ejemplo, las reglas de introducción del universal y la eliminación del existencial requerirían un tratamiento especial; el método del punto existencial no nos informa *cuántos* individuos hay en el conjunto, y por tanto no podemos escoger entre diferentes individuos para satisfacer las restricciones usuales de la eliminación del cuantificador existencial. En el caso de la falacia de distribución del existencial ($\exists x\, Px \wedge \exists x Qx \vdash \exists x\, (Px \wedge Qx)$) habría que permitir la aparición de dos puntos existenciales para evitar que dicho esquema resulte válido, lo cual complicaría las reglas de diagramación. Así mismo, dada una proposición como *P* no habría forma de saber si nos encontramos ante una expresión $\forall x Px$ o una $\exists xpx$, y algo similar vale para las negaciones de las estas.

Por otro lado, podría objetarse el uso de un método indirecto de prueba, ya que graficar la negación de la conclusión de los esquemas puede dar lugar a equívocos en el salón de clase. Podría hacerse un método directo de prueba, pero, como dije, habría que leer los gráficos, y a pesar de que estén bien realizados, el estudiante podría confundirse. En cambio, al buscar inconsistencias, es más fácil ver cuándo un punto aparece sobre las rayas, y si el diagrama está bien hecho, la inconsistencia es evidente.

Finalmente este método puede hacerse más fuerte aún como herramienta didáctica cuando se combina con la tecnología: si los diagramas se hacen dinámicos mediante animaciones en computador, usando Power Point o Flash Player, el estudiante entenderá más fácilmente por qué, por ejemplo, una expresión como "*A* es *B*»" se representa rayando la lúnula de A. Así mismo, pueden usarse *regletas* que ya tengan los conjuntos y las rayas previamente trazadas, de manera que el estudiante solo tenga que superponerlas para saber si está rayando correctamente. Concluyo esperando que realmente la implementación de este método ayude en la comprensión de la lógica, la semántica y la argumentación, que en muchos casos suele verse de manera muy superficial y se convierte más en una carga que en una ayuda para el desarrollo de las habilidades de comprensión lectora.

Referencias

Baldor, A. (2008). *Álgebra*. México D. F.: Patria.

Cabanzo, A. (2010). Argumentación y demostración. *Logos*, 1(17), 171-185.

Cisneros, M., Olave, A. & Rojas, I. (2010). *La inferencia en la comprensión lectora*. Pereira, Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira.

Eco, H. (1991). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna: por qué Juanito no sabe sumar.* México, D. F.: Siglo XXI.

Kreidler, C. (2002). *Introducing English Semantics*. Nueva York: Routledge.

Nidditch, P. (1995). *El desarrollo de la lógica matemática*. Madrid: Cátedra.

Quine, W. V. (1981). *Los métodos de la lógica*. México D. F.: Ariel.

Van Dijk, T. (2005). *Estructuras y funciones del discurso*. México, D. F.: Siglo XXI.