Gestión y Sociedad

Volume 6 | Number 1 Article 7

2013-06-01

Antecedentes y elementos teóricos básicos y conceptuales del modelo de Markowitz

José Manuel Fuquen Sandoval
Universidad de La Salle, Bogotá, jmfuquens@hotmail.com

Diego Rozo Rodríguez
Universidad de La Salle, Bogotá, drozo@unisalle.edu.co

Antecedentes y elementos teóricos básicos y conceptuales del modelo de Markowitz

José Manuel Fuquen Sandoval*
Diego Rozo Rodríguez**

Recibido: 30 de noviembre del 2012. **Aprobado**: 13 de febrero del 2013

Resumen

A partir del modelo de máxima utilidad, las pruebas de contraste que planteó Markowitz con el modelo de diversificación conocido como la técnica de la media-varianza y el análisis geométrico de portafolios con tres activos se determinará la cartera de mínimo riesgo, la forma del valor esperado y la volatilidad de los portafolios. También se presentan las curvas de indiferencia, los supuestos del modelo de Markowitz y el proceso para determinar el conjunto factible y la frontera eficiente. Se presenta el caso del portafolio de dos activos para conformar la frontera eficiente, en especial, cuando el coeficiente de correlación entre el rendimiento de los activos es +1, -1 y entre estos dos valores . Se dan las expresiones y se describe cómo construir matemáticamente la frontera eficiente con y sin ventas en corto, para lo cual es necesario obtener el rendimiento de la cartera de mínima varianza con o sin ventas en descubierto, lo cual es la variable exógena del modelo. Asimismo, se ilustra cómo el inversionista debe definir una función de utilidad en términos de la media y la varianza, que sea consistente con el axioma de estas medidas. Por último, se presenta el modelo de un índice para determinar retornos, covarianzas y betas de valores individuales y de carteras.

Palabras clave

Valor esperado, volatilidad, riesgo, correlación, diversificación, acciones, beta, utilidad.

* Ingeniero Industrial de la Universidad Incca de Colombia, Bogotá, Colombia. Especialista en Administración de Salud. Magíster en Administración de Empresas. Profesor de la Facultad de Ciencias Administrativas y Contables, Universidad de La Salle, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: jmfuquens@hotmail.com

** Ingeniero Industrial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Profesor de la Facultad de Ciencias Administrativas y Contables, Universidad de La Salle. Correo electrónico: drozo@unisalle.edu.co

Abstract

Based on the maximum utility model, the contrast tests raised by Markowitz with the diversification model known as the mean-variance technique and the geometric analysis of portfolios with three assets will determine the minimum risk portfolio, the form of the expected value and volatility of the portfolios. The indifference curves are also presented, together with the postulations of the Markowitz model and the process for determining the feasible set and the efficient frontier. It presents the case of the portfolio of two assets to form the efficient frontier, especially when the correlation coefficient between the return on assets is +1, -1, and between these two values . The expressions are given, and it is described how to mathematically build the efficient frontier with and without short sales, for which it is necessary to obtain the performance of the minimum variance portfolio with or without short sales, which is the exogenous variable of the model. Likewise, it illustrates how an investor must define a utility function in terms of the mean and variance in a way that is consistent with the axiom of these measures. Finally, the model of an index to determine returns, covariances and betas of individual securities and portfolios are presented.

Keywords

Expected value, volatility, risk, correlation, diversification, stocks, beta, utility.

Valor esperado

El valor esperado es un pilar conceptual para el desarrollo del modelo de Markowitz. Se considera al trabajo *Libellus de Ratiotiniis in Ludo Aleae de Huygens* (1657) como el primer estudio que determinó el valor esperado, expectativa (esperanza) matemática o simplemente promedio.

Daniel Bernoulli (1738) cita en un trabajo la proposición del valor esperado e ilustra gráfica y matemáticamente la relación más general entre la utilidad y la riqueza. A partir de la hipótesis de la utilidad esperada, solucionó el problema de la famosa paradoja de San Petersburgo planteada por su primo Nicholas Bernoulli en 1713. Sin embargo, el profesor Cramer había dado la misma solución en 1728; el problema era determinar el retorno esperado del juego de lanzar una moneda equilibrada hasta que aparezca una cara sabiendo que el jugador gana 2^n ducados si la primera cara sale en el lanzamiento -ésimo. El valor esperado de este juego o ganancia media es infinito.

Bernoulli desarrolló dos conceptos importantes para la economía; la dependencia de la utilidad de la riqueza de las personas, mediante la función logarítmica de la forma $Y = b \log x/\alpha$ donde $Y =$ utilidad, b es una constante, x es la riqueza final y

α es la riqueza previa, asociando la utilidad marginal decreciente. El otro concepto se refiere a que las personas evalúan el riesgo no por el retorno esperado que produce ese riesgo, sino más bien por la utilidad esperada que genera ese riesgo.

La primera media de once valores fue publicada por Dow en 1884 y tres años más tarde creó el índice industrial con doce valores y un índice de veinte valores de ferrocarriles. Hacia 1928, el índice industrial contemplaba treinta valores, actualmente es conocido como El Promedio Industrial Dow Jones (DJIA), el índice más importante del conjunto de índices creados por la empresa[1] fundada en 1882.

El primer estudio sobre retornos y desviación estándar se realizó en la bolsa New York Stock Exchange (NYSE) por obra de Fisher y Lorie (1964) y consideró diferentes periodos desde 1926, pero la desviación estándar del *stock* de retornos de mercado se publicó cuatro años después. Ibbotson y Sinquefield (1976) hallaron estimaciones de la prima de riesgo de los activos y determinaron para el periodo de 1926 a 1974 el retorno promedio del 10,9 % por año del Standar and Poor 500 índex (S & P 500)[2] y un exceso de retorno sobre los bonos del tesoro del 8,8 % por año. Dimson and Brealey (1978) producen el primer estudio histórico en el UK[3] de la prima de riesgo de los activos con un 9,2 % entre 1919-1977.

La hipótesis de Bernoulli de la utilidad esperada con algunas excepciones como Marshall (1890) y Edgeworth (1911) solo fue acogida con la aparición de la obra *Theory of Games and Economic Behavior* del matemático John Von Neumann y el economista Oskar Morgenstern (1944), la cual se apartaba del enfoque tradicional de utilidad bajo certeza a la utilidad esperada y asumía axiomas del comportamiento del individuo bajo condiciones de riesgo, lo cual se constituyó en la base de la teoría de los juegos y en un paradigma del proceso de toma de decisiones.

[1] Charles Dow y Edward Jones fundaron la empresa Dow Jones & Company.

[2] Es un índice ponderado por la capitalización del mercado de quinientas acciones representativas de todas las industrias de los Estados Unidos.

[3] Sigla originada en United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland, comúnmente conocido como United Kingdom.

Estructura de preferencias del inversionista bajo incertidumbre

Al no existir certeza sobre los precios futuros de los activos estos se tornan riesgosos y hacen de la incertidumbre la esencia para analizar el comportamiento del inversionista y considerar la diversificación como una práctica común y razonable para disminuir la incertidumbre. La teoría económica destaca dos modelos normativos de elección que tratan los activos bajo condiciones de incertidumbre y guían el proceso de los inversores bajo el principio de la optimización: la teoría de la utilidad esperada,[4] desarrollada por John Von Neumann y Oscar Morgenstern.[5] El otro modelo normativo corresponde a los trabajos del Premio Nobel de Economía Harry Markowitz (1952 y 1959), publicados en el artículo pionero "Selección del portafolio" y en el libro *Selección del portafolio* (1952): "Diversificación eficiente de inversiones"; complementa este enfoque normativo el trabajo del también premio Nobel James Tobin (1958). En estos modelos se asume que el inversionista tiene preferencias razonables y ordenadas sobre los diferentes planes de inversión que ofrecen resultados inciertos basados en

[4] Sus limitaciones empíricas y conceptuales han dado origen a las Teorías de la Utilidad no Esperada.

[5] *Theory of Games and Economic Behavior.*

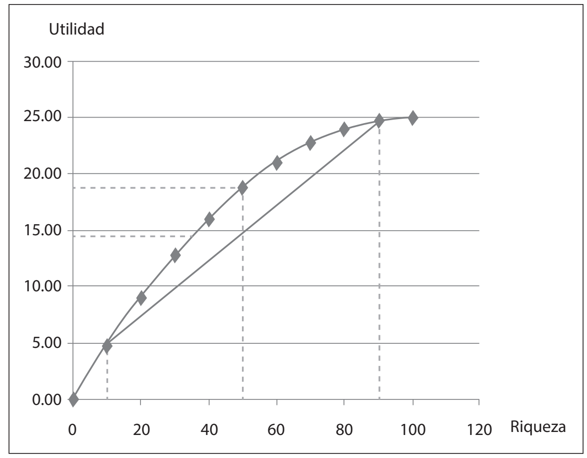
la distribución de probabilidades de los resultados futuros de las inversiones y la expectativa derivada de la variable aleatoria de los verdaderos retornos de la inversión.

En el modelo de máxima utilidad de Von Newmann-Morgenstern el atractivo sobre las diferentes opciones generadoras de riqueza determina la ordenación, las relaciones y los supuestos importantes de las preferencias. En este modelo el inversionista bajo condiciones de incertidumbre elige la opción con la utilidad máxima esperada, evaluando toda la distribución de probabilidades, pero sin considerar el riesgo de las opciones como la dispersión alrededor de la media, puede ocurrir indiferencia en la elección entre dos planes de inversiones con la misma utilidad máxima esperada.

Las preferencias de los inversionistas ante el riesgo lo hacen ver como neutral, adverso o amante del riesgo dependiendo de la relación entre la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern y la utilidad del valor esperado. En el primer caso, la utilidad esperada de la riqueza es equivalente a la utilidad de su valor esperado. Para un inversionista adverso al riesgo, por ejemplo, $ 10 millones con certeza es mejor que un valor esperado de $ 10 millones, a no ser que la distribución de probabilidades sea muy favorable y cuando el inversionista es amante de correr riesgos preferiría los $ 10 millones de valor esperado a obtener $ 10 millones con certeza, a no ser que la distribución de probabilidades sea muy desfavorable. La figura 1 ilustra un inversionista adverso al riesgo que adquiere acciones por $ 50 millones y espera una riqueza adicional de $ 40 millones o pérdida por $ 40 millones, asumiendo resultados igualmente probables y con una función de utilidad de la riqueza cóncava construida con la siguiente expresión:

$$U(W) = -0{,}0025\ W^2 + 0{,}5\ W \text{ donde } W = \text{riqueza}$$

Figura 1. Inversionista adverso al riesgo



Fuente: elaboración propia.

Otro ejemplo de funciones de utilidad se encuentran en una tabl a de Levy-Markowitz (1979), sobre los retornos anuales de 149 portafolios expresadas así:

$$U(R) = \text{Log}\ (1 + R);\ U(R) = (1 + R)^{\alpha}.$$

El análisis comparativo, en función de la utilidad esperada, extendido a la conformación de portafolios no es adecuado y el problema se torna más complejo, porque existen infinito número de distribuciones de probabilidad que hacen prácticamente imposible aplicar y maximizar la función de Von Newmann-Morgenstern.

Por otra parte, Markowitz, en su trabajo pionero,[6] normativo de la media-varianza, inicialmente expone dos reglas de comportamiento del inversor que contrasta con su regla propuesta de retornos esperados y varianza de los retornos esperados.

[6] Hecho en la comisión Cowles para la Investigación en Economía con financiamiento de Consejo de Investigación de las Ciencias Sociales.

Markowitz rechaza primero como guía del comportamiento del inversionista la norma que enuncia la maximización de los retornos esperados o anticipados descontados del inversionista, porque no implica diversificación y desconoce si los retornos se conforman a la misma tasa o tasas diferentes de descuento, además de no considerar cómo se deciden las tasas y su posible variación con el tiempo. Por lo anterior, ante dos valores esperados iguales de grandes, simplemente cualquiera constituye la mejor opción.

La segunda regla que rechaza se apoya en la ley de los grandes números y establece que el inversor debe diversificar entre todos los activos que den un retorno máximo esperado. En este contexto, la mencionada ley asegura que los rendimientos actuales del portafolio serán prácticamente iguales a los retornos esperados, suponiendo que hay un portafolio con el retorno esperado máximo y de mínima varianza recomendado para el inversor. El rechazo se justifica cuando no se considera que los retornos de los activos están intercorrelacionados, en consecuencia, la diversificación no puede eliminar toda la varianza y el portafolio de máximo retorno esperado no es necesariamente el de mínima varianza.

Markowitz analizó e ilustró el análisis geométrico de la regla de retorno esperado (E); la varianza de los retornos esperados (V) y la exclusión de las ventas en corto,[7] basado en tres y cuatro títulos y no con n valores; por consiguiente, se emplearon las siguientes expresiones básicas relativas a la definición de la variable aleatoria rendimiento del portafolio combinado r_p, el valor esperado y la varianza de r_p.

$$r_p = \mathrm{w}_1 r_1 + \mathrm{w}_2 r_2 + \cdots + \mathrm{w}_n r_n \qquad (1)$$

[7] En el momento de la operación de venta no se dispone de valores y se toman prestados para posteriormente comprarlos y cubrir el préstamo.

$$\mathrm{E}(r_p) = \mathrm{w}_1\mathrm{E}(r_1) + \mathrm{w}_2\mathrm{E}(r_2) + \cdots + \mathrm{w}_n\mathrm{E}(r_n) \qquad (2)$$

$$\mathrm{V}(r_p) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{w}_i^2 \mathrm{V}(r_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1+1}^{N} \mathrm{w}_i \mathrm{w}_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{w}_i \mathrm{w}_j \sigma_{ij} \qquad (3)$$

Donde σ_{ij} representa la covarianza entre la variable aleatoria r_i y r_j y la ponderación.

En las expresiones siguientes que utiliza Markowitz, la variable representa el rendimiento del portafolio combinado de tres valores; $\mathrm{R_i}$ el rendimiento o retorno para los activos (tanto R como $\mathrm{R_i}$ son variables aleatorias); $\mathrm{X_i}$ el porcentaje de la inversión hecho en el activo $\mathrm{R_i}$ y μ_i es el valor esperado del activo $\mathrm{R_i}$, es decir $\mu_i = \mathrm{E(R_i)}$, entonces se tiene para el caso de 3 títulos valores:

$$\mathrm{E(R)} = \textstyle\sum_{i=1}^{3} x_i \ \mu_i \qquad (4)$$

$$\mathrm{V(R)} = \textstyle\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i x_j \ \sigma_{ij} \qquad (5)$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \qquad (6)$$

$$x_i \geq 0 \qquad (7)$$

Para i = 1, 2, 3

Adicionalmente hace $\mathrm{X_3 = 1 - X_1 - X_2}$ (8)

Cuando se grafican las restricciones (7) y (8) se obtiene un triángulo que representa todas las combinaciones $\mathrm{X_1}$ y $\mathrm{X_2}$ factibles. Sobre este plano traza las líneas isomedias correspondientes a varios valores esperados, para lo cual sustituye en (8) el valor de $\mathrm{X_3}$ deducido en (12) y se obtiene la expresión transformada:

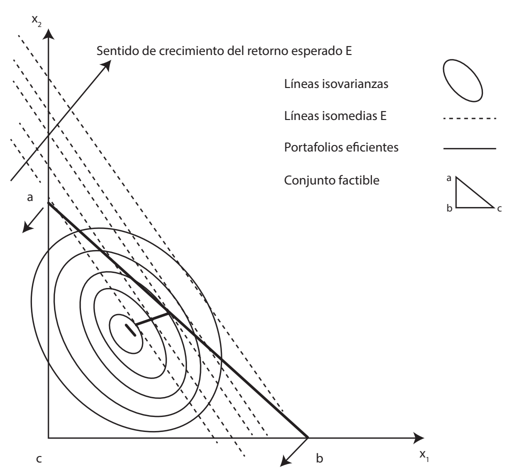
$$\mathrm{E(R)} = \mu_3 + \mathrm{X_1}(\mu_1 - \mu_3) + \mathrm{X_2}(\mu_2 - \mu_3) \qquad (4')$$

y despejando para $\mathrm{X_2}$ se trazan las líneas isomedias. En cada línea isomedia se encuentran todos los portafolios (puntos o combinaciones $\mathrm{X_1}$, $\mathrm{X_2}$) para un retorno esperado dado. De manera similar se trazan las líneas isovarianzas que conforman una familia de elipses concéntricas. Cada línea isovarianza contiene todos los portafolios para una varianza de retorno dada. Estas líneas se obtienen con la siguiente expresión deducida a partir de (5) y con la sustitución presentada en (8) se tiene para la varianza[8] la expresión (5'):

$$V(R) = X_1^2 (\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + X_2^2 (\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2X_1X_2 (\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2X_1 (\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2X_2 (\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33} \quad (5')$$

En la gráfica de Markowitz el punto puede caer dentro o fuera del conjunto factible. Cuando cae dentro, como en la figura 2, X es el centro del sistema que minimiza la varianza y, por lo tanto, la combinación X_1, X_2 en ese punto es eficiente, no hay ningún otro portafolio que tenga una varianza menor para el mismo valor del retorno esperado o para uno mayor, o un retorno esperado más grande con la misma o menor varianza, tal punto es el comienzo del conjunto eficiente.

Figura 2. Ubicación del punto X en la gráfica de Markowitz

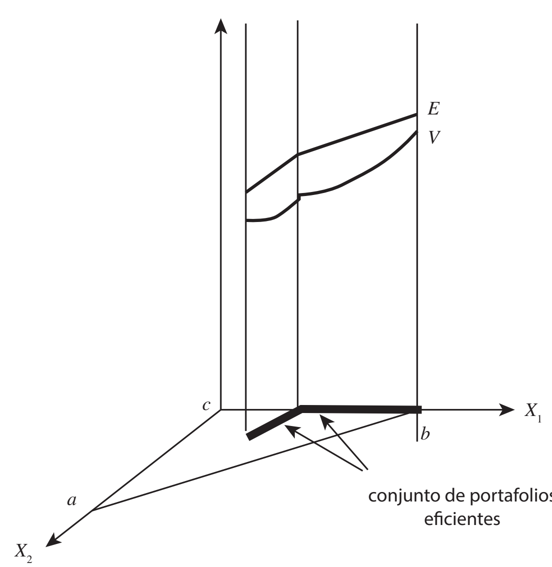


Fuente: elaboración propia.

Cuando las líneas isomedias hacen tangencia con las líneas isovarianzas la varianza toma su valor menor, pero en la medida en que las isovarianzas se alejan del punto X la varianza es mayor. El conjunto eficiente está formado por dos partes en este plano; la primera parte constituida por el segmento, de la línea crítica, desde X hasta el intercepto con la frontera eficiente y la segunda parte por el segmento que inicia en este intercepto y se dirige sobre el límite eficiente hasta b.

Dada la naturaleza observada de las combinaciones del conjunto de portafolios eficientes, para el caso de tres activos y de acuerdo con las expresiones (4') (5') y el valor esperado E y varianza V es un plano y una paraboloide, respectivamente. Si se grafican los puntos V, E para cualquier número de portafolios eficientes se obtiene una serie de segmentos de parábolas conectadas como se aprecia en la figura 3.

Figura 3. Expresión gráfica del valor esperado E y la varianza V en portafolios eficientes



Fuente: elaboración propia.

La función de utilidad del inversionista de Markowitz depende de los primeros dos momentos

8 La cual tiene la forma de $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y con un discriminante de $B^2 - 4AC < 0$, la gráfica es una elipse-paraboloide elíptico.

de la variable aleatoria, explicando que cuando se invierte parte de la riqueza W por ejemplo W_i se espera obtener después de un periodo de tenencia una riqueza final incluido el valor de cualquier dinero pagado al inversionista entre $t = 0$ y $t = 1$. La tasa de retorno de la inversión R permite expresar la utilidad de los inversionistas en términos del rendimiento de la inversión mediante la siguiente expresión:

$$R = \frac{W_f - W_i}{W_i} = \frac{W_f}{W_i} - 1 \qquad (9)$$

De donde $W_f = W_i$ y, por lo tanto, se puede expresar que: $U = g(R_w, \sigma_w)$.

El enfoque de utilidad asume que el inversionista racional, bajo condiciones *ceteris paribus*, si $\partial U/\partial E_w > 0$, prefiere la riqueza esperada más alta E_w a un valor bajo; y si $\partial U/\sigma_w < 0$ se muestra adverso al riesgo cuando se prefiere una inversión con una baja desviación estándar σ_w, a una desviación más alta, dado un nivel de riqueza E_w. De esta manera, el plan de inversiones de activos riesgosos es eficiente o dominante si no existe otro portafolio que ofrezca el mismo retorno esperado, pero con menor riesgo (desviación estándar) o una cartera con el mismo riesgo y más alto retorno esperado o un portafolio que muestre, a la vez, un mayor retorno y menor riesgo. El argumento anterior se expresa formalmente como el axioma de la media y la varianza así:

Sean los portafolios factibles A y B con media y varianza $(\overline{r_A}, \sigma_A^2; \overline{r_B}, \sigma_B^2)$ respectivamente. Entonces el portafolio A domina al portafolio B si y solo si cumple:

$$\overline{r}_A > \overline{r}_B \; y \; \sigma_A \leq \sigma_B \; o \; \overline{r}_A \geq \overline{r}_B \; y \; \sigma_A < \sigma_B$$

Los portafolios que se representan en el espacio riesgo-rendimiento R-R también llamado volatilidad-rendimiento, se definen así:

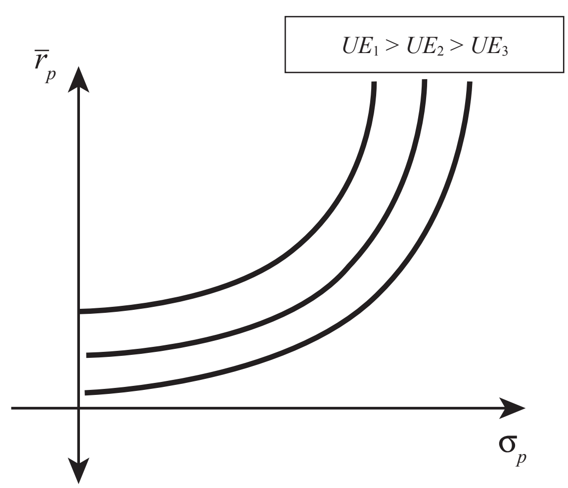
$$R - R : \{(\sigma_p, \overline{r}_p): \sigma_p \in R^+ \cup \{0\}, \overline{r}_p \in R$$

Espacio r-r y curvas de indiferencia

En este espacio se trazan las curvas de indiferencia de pendiente positiva y paralelas, de los inversionistas —no se cortan por la contradicción que surge entre las relaciones demostrable con los axiomas— que representan diferentes niveles de utilidad esperada y en la medida en que se alejen hacia el noroeste, mayor utilidad esperada tienen (figura 4).

Estas preferencias ordenadas se pueden expresar como funciones de utilidad lineales o no lineales si se utiliza una escala ordinal y si se asignan números de la recta numérica a cada preferencia. Una función de utilidad puede transformarse en otra función de utilidad monótonamente creciente con una tasa de variación positiva, que represente las mismas preferencias débiles. La convexidad de las curvas de indiferencia implica que el inversionista tiene aversión creciente al riesgo con respecto a un nivel de riesgo dado.

Figura 4. Curvas de indiferencia de pendiente positiva y paralelas



Fuente: elaboración propia.

James Tobin ilustra que el axioma de la media y la varianza se cumple, bien sea con la función original de utilidad cuadrática o cuando los retornos se distribuyen como una normal, es decir, que solo se requiere que los inversionistas sean adversos al riesgo, lo cual se representa con cualquier función de utilidad cóncava, ya que por el teorema del límite central, la distribución de la media muestral de un número grande de retornos aleatorios independientes e idénticamente distribuidos tiende a distribuirse como una normal.

Por lo tanto, el modelo de Markowitz asume que las preferencias de los inversionistas están determinadas exclusivamente por los dos momentos de la variable aleatoria de los rendimientos, lo cual también es demostrable cuando se considera la función de utilidad cuadrática de la siguiente manera:

Sea la función de utilidad de la forma: $U = -ar^2 + br + c, con\ a, b, c > 0$ y con $r \in \{-\infty, b/2a\}$, donde r es el rendimiento esperado del portafolio y a, b, c son constantes pertenecientes a los R^+. Si consideramos el valor esperado de la función de utilidad, tenemos:

$$UE = -aE(r^2) + bE(r) + c$$

Por otra parte, por definición la varianza de los rendimientos se puede expresar así:

$V(r) = E(r^2) - [E(r)]^2$ de donde $E(r^2) = V(r) + [E(r)]^2$ y remplazando en UE se tiene: $UE = -a\{V(r) + [E(r)]^2\} + bE(r) + c$

Por lo tanto, la utilidad esperada es una función que depende solo de la varianza y del retorno de los rendimientos, además satisface el axioma de la media y de la varianza al derivar parcialmente en relación con la varianza y el retorno.

Modelo de Markowitz

Esta teoría normativa contempla los siguientes supuestos acerca de los inversionistas y del mercado:

1. Los inversionistas evalúan los portafolios a partir de los rendimientos esperados y la desviación estándar de los portafolios durante un horizonte de un periodo, de modo que su estructura de preferencias se representa mediante una función de utilidad esperada del tipo $UE = f(\sigma^2, r)$.

   Donde σ^2, r es la varianza y la media del retorno de la inversión respectivamente

2. Los inversionistas son insaciables, siempre prefieren el rendimiento más alto entre dos opciones que tengan la misma desviación estándar tal que: $\partial UE / \partial r > 0$)

3. Los inversionistas son adversos al riesgo, así cuando se tienen dos opciones con el mismo rendimiento elegirán la opción con menor riesgo, es decir, la opción con la desviación estándar más baja $\partial UE / \partial \sigma < 0$).

4. Tanto los activos individuales como las carteras o portafolios son infinitamente divisibles, lo que significa que todos los activos y carteras se pueden comprar o vender en cualquier fracción.

5. El mercado es operativamente eficiente, no hay fricciones, los costos e impuestos a las transacciones son irrelevantes.

6. Los mercados son eficientes al menos en la forma débil y los inversionistas tienen expectativas homogéneas, es decir, tienen las mismas percepciones con respecto a los rendimientos esperados de los activos o valores, desviaciones estándar y covarianza de los

valores, lo que implica distribuciones homogéneas de probabilidad de los rendimientos y la inexistencia de asimetrías de información.

7. Todos los inversionistas disponen de la misma información.

La selección del portafolio de Markowitz es un proceso en dos etapas o fases, la primera inicia con la observación y la experiencia para terminar con el valor esperado de los retornos de los activos disponibles y la segunda inicia con las creencias de los inversionistas sobre el futuro comportamiento del valor de los activos para terminar con la selección del portafolio.

El modelo no establece en cuáles y en cuántos activos invertir, pero es una hipótesis explicativa del comportamiento racional del inversionista y una guía importante para la toma de decisiones, diferenciada de las conductas especulativas, que implica una eficiente diversificación sin depender del número de activos elegidos aleatoriamente, ingenua o intuitivamente o de invertir en portafolios de muchas acciones, buscando una varianza pequeña. Con anterioridad al trabajo de Markowitz se sabía que el portafolio era menos riesgoso en la medida en que la cartera fuera conformada por más activos.

La diversificación eficiente planteada por Markowitz tiene en cuenta la covarianza, de forma que se esperaría tener un portafolio conformado por acciones de empresas de diferentes industrias o sectores diferenciados por características económicas que tienden a tener entre las acciones una covarianza más baja que, por ejemplo, la apreciada en empresas del mismo sector. A partir de un número de activos que conforman un portafolio o cartera, el modelo resuelve en qué proporciones invertir en cada uno de ellos. El aporte principal es recoger de forma explícita en el modelo los rasgos fundamentales de lo que en un principio se puede calificar como conducta racional del inversor, consistente en buscar aquella composición de la cartera que haga máxima la rentabilidad de la cartera[9] para un determinado nivel de riesgo de esta, o bien, un mínimo riesgo de la cartera para una rentabilidad dada.

No obstante, el modelo de Markowitz no determina el número de activos, ni selecciona en qué activos invertir; por su parte, el análisis media-varianza sí considera plenamente los dos objetivos que el inversionista tiene en conflicto en el momento de la compra, por una parte, maximizar los rendimientos esperados y, por otra, minimizar el riesgo; todo lo anterior constituye la base para la mayoría de los modelos de selección del portafolio.

Retomamos las ecuaciones (6) y (7), ecuaciones del retorno esperado y la varianza del portafolio:

$$\mathrm{E}(r_p) = \mathrm{w}_1\mathrm{E}(r_1) + \mathrm{w}_2\mathrm{E}(r_2) + \cdots + \mathrm{w}_\mathrm{n}\mathrm{E}(r_\mathrm{n})$$

$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \sum_{j=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{w}_\mathrm{i}\mathrm{w}_\mathrm{j}\, \sigma_{\mathrm{ij}}$ donde $\mathrm{w}_\mathrm{i}\mathrm{w}_\mathrm{j}$ son proporciones de inversión y σ_{ij} es la covarianza entre activos.

La varianza del portafolio matricialmente se representa como: $\sigma_p^2 = \mathrm{w}^\mathrm{T}\Omega\ \mathrm{w}$, donde Ω representa la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos de los activos del portafolio y w^T el vector traspuesto de las proporciones.

Se observa que por lo general entre más activos conformen el portafolio, es decir, entre más diversificación se tiene, menor es la desviación estándar de la cartera, dado que las proporciones de inversión se reducen, pero están sujetas a la restricción presupuestal que implica que

[9] Se entiende por cartera de valores o portafolio a una determinada combinación de valores mobiliarios adquiridos por una persona física o jurídica y, por lo tanto, que pasan a formar parte de su patrimonio. En ella se incluyen cualquier tipo de activos financieros.

la sumatoria de estas participaciones es igual al cien por ciento. Por consiguiente, se puede hablar de diferentes tipos de diversificación en consideración a diversos criterios, como por ejemplo, la diversificación aleatoria, la diversificación intuitiva, de acuerdo con los valores que muestren menor riesgo o una diversificación más útil que implica que la correlación entre activos es negativa y, por último, la diversificación eficiente del modelo de Markowitz que si minimiza σ_p establece las proporciones de inversión de cada uno de los activos que conforman el portafolio, considerando el comovimiento entre activos, es decir la covarianza, la cual también se puede expresar también en función de las desviaciones de los activos y del coeficiente de correlación así:

$$\sigma_{\mathrm{ij}} = \rho\sigma_{\mathrm{i}}\ \sigma\mathrm{j}$$

De esta manera el modelo de la media-varianza para el inversionista consiste en:

Maximizar $UE\ (r_p\ , \sigma_p)$ (10)

sujeto a $\sum_{i=1}^{2} w_i = 1$

Si la anterior sumatoria es < 1 se entiende que se presta una parte del presupuesto y, por lo tanto, no se invierte la totalidad disponible, mientras que si esta sumatoria es >1 se considera que el inversionista se endeuda e invierte un mayor valor al presupuesto total disponible.

Cuando la proporción de inversión de un activo es negativa indica que la venta se hizo en corto (posición corta), es decir, se vende sin poseer los activos en el momento de la transacción; para restringir este evento se adiciona la siguiente relación $W_i > 0$.

Para resolver el modelo de Markowitz se requiere aparte de conocer la función de utilidad del inversionista expresada en función de la media y la varianza, n ecuaciones de retorno esperado, n ecuaciones de varianza y $n\ (n$ - 1)/2 ecuaciones de covarianza o coeficientes de correlación que se obtienen al resolver la combinación $\binom{n}{2}$

Conjunto factible y subconjunto eficiente de portafolios

Dada la naturaleza de los valores que toman las ponderaciones Wi el conjunto factible de portafolios formados a partir de n activos seleccionados es un subconjunto extenso por no decir infinito, con una forma en el espacio riesgo-rendimiento que depende del número de retornos y de la correlación entre ellos. De este subconjunto es necesario determinar el subconjunto óptimo de portafolios con respecto al axioma de la media y la varianza, conocido como *conjunto eficiente de portafolios,* entre los cuales elige el inversionista maximizando su función de utilidad y cuya representación gráfica se denomina *la frontera eficiente*. Para obtener este conjunto eficiente se conforman dos subconjuntos: el primero, dados los rendimientos esperados, se clasifican los portafolios con menor varianza. El segundo se construye a partir de cada nivel de riesgo con los portafolios de mayor rendimiento y de estos dos subconjuntos se seleccionan los portafolios eficientes, que determinan gráficamente la frontera eficiente de Markowitz, es decir, la frontera estará conformada con los portafolios de mínimo riesgo entre portafolios de igual rendimiento y los portafolios de máximo rendimiento entre portafolios de igual riesgo.

Alternativamente a la ilustración geométrica de Markowitz expuesta con tres títulos valores, a continuación se ilustra la forma de la frontera eficiente para portafolios constituidos por dos activos y analizados cuando la asociación entre los retornos es directa y máxima para una correlación de +1 llamada perfecta positiva; cuando este coeficiente vale -1 indica una asociación inversa extrema entre los retornos reconocida teóricamente como correlación perfecta negativa; y el tercer caso cuando el coeficiente de correlación está entre estos dos valores extremos [-1; 1].

Para los tres casos se considera el portafolio P conformado por las acciones A y B con media y varianza $(\bar{r}_A, \sigma_A^2 ; \bar{r}_B , \sigma_B^2)$ respectivamente, y si se asume que $\bar{r}_A \geq \bar{r}_B$, consecuentemente $\sigma_A^2 \geq \sigma_B^2$.

Caso: correlación perfecta positiva $\rho_{AB} = +1$

El rendimiento esperado del portafolio P se expresa como $\bar{r}_P = w_A\bar{r}_A + w_B\,\bar{r}_B$ y la varianza del portafolio P se pude expresar como la varianza de la suma de las variables de los rendimientos ponderados por las cantidades de inversión que se consideran mayores ≥ 0, así:

$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_{AB}$ donde σ_{AB} es igual a la covarianza de las dos acciones, la varianza del portafolio se puede expresar también así $\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B\,\rho_{AB}$ dado que $\sigma_{AB} = \sigma_A\sigma_B\,\rho_{AB}$, el producto de las desviaciones por el coeficiente de correlación.

Como en este caso $\rho_{AB} = 1$ entonces se tiene:

$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B$ que es un binomio cuadrado perfecto y, por lo tanto, la desviación del portafolio es:

$\sigma_p = w_A\sigma_A + w_B\sigma_B$, como $w_A + w_B = 1$, al reemplazar $w_B = 1 - w_A$ en la desviación del portafolio y despejando para w_A se tiene:

$w_A = (\sigma_p - \sigma_B)/(\sigma_A - \sigma_B)$ esta expresión reemplaza a w_A en la ecuación del rendimiento esperado para las dos acciones y se obtiene la ecuación de una línea recta:

$\bar{r}_P = \dfrac{\sigma_A\bar{r}_B - \sigma_B\bar{r}_A}{\sigma_A - \sigma_B} + \dfrac{(\bar{r}_A - \bar{r}_B)}{(\sigma_A - \sigma_B)}\,\sigma_p$ cuya pendiente $\dfrac{(\bar{r}_A - \bar{r}_B)}{(\sigma_A - \sigma_B)}$ es positiva según los supuestos iniciales, la recta representa las combinaciones formadas con las acciones A y B ubicadas en el segmento lineal BA de la figura 5.

Caso: correlación perfecta negativa $\rho_{AB} = -1$

Como la varianza del portafolio de las acciones A y B es:

$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B\,\rho_{AB}$ al reemplazar $\rho_{AB} = -1$ se tiene $\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 - 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B$

Así la varianza del portafolio al ser un trinomio cuadrado perfecto permite expresar la desviación del portafolio que por definición se asume no negativa como: $\sigma_p = w_A\sigma_A - w_B\sigma_B$ y como en el caso anterior al reemplazar $w_B = 1 - w_A$, la desviación del portafolio es:

$\sigma_p = [w_A\,(\sigma_A + \sigma_B) - \sigma_B]$ el valor de la desviación es negativo si la diferencia entre el paréntesis es < 0 o la desviación es cero o positiva si la diferencia es ≥ 0 y en ambos depende del valor de la variable w_A, de manera que para la desviación del portafolio negativa $\sigma_p = -[w_A\,(\sigma_A + \sigma_B) - \sigma_B]$ se requiere que $w_A\,(\sigma_A + \sigma_B) < \sigma_B$: que es equivalente a $w_A < \sigma_B/(\sigma_A + \sigma_B)$ y por lo tanto despejando para w_A en $\sigma_p = -[w_A(\sigma_A + \sigma_B) - \sigma_B]$ se obtiene: $w_A = (\sigma_B - \sigma_p)/(\sigma_A + \sigma_B)$

Cuando se considera la desviación $\sigma_p = 0$ se tiene $w_A = \sigma_B/(\sigma_A + \sigma_B)$, mientras que para la desviación positiva $\sigma_p = +[w_A(\sigma_A + \sigma_B) - \sigma_B]$ se debe tener que $w_A(\sigma_A + \sigma_B) > \sigma_B$ que equivale a $w_A > \sigma_B(\sigma_A + \sigma_B)$, obteniendo de σ_p positiva $w_A = (\sigma_p + \sigma_B)/(\sigma_A + \sigma_B)$.

Estas equivalencias de w_A se reemplazan en la ecuación del retorno medio del portafolio

$\bar{r}_P = w_A \bar{r}_A + w_B\, \bar{r}_B$ y al desarrollar los productos y factorizar se obtiene las ecuaciones correspondientes a dos rectas una de pendiente negativa y otra de pendiente positiva así:

Si $w_A < \sigma_B/(\sigma_A + \sigma_B) \rightarrow w_A = (\sigma_B - \sigma_p)/(\sigma_A + \sigma_B)$ y

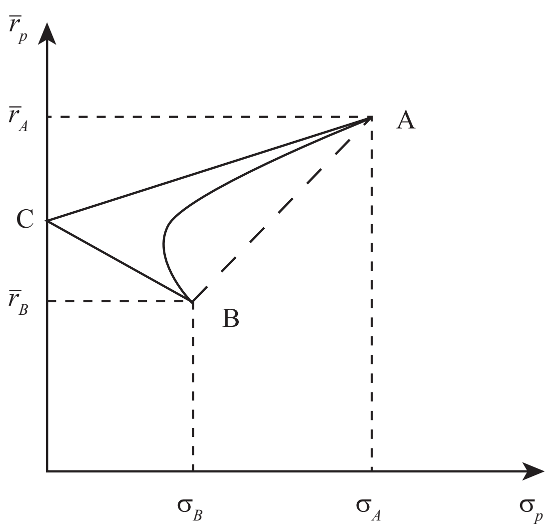
$$\bar{r}_P = \bar{r}_B + \frac{\sigma_B(\bar{r}_A - \bar{r}_B)}{\sigma_A + \sigma_B} + \frac{(\bar{r}_B - \bar{r}_A)}{(\sigma_A + \sigma_B)}\ \sigma_p$$

Si $w_A > \sigma_B/(\sigma_A + \sigma_B) \rightarrow w_A = (\sigma_B + \sigma_p)/(\sigma_A + \sigma_B)$ y

$$\bar{r}_P = \bar{r}_B + \frac{\sigma_B(\bar{r}_A - \bar{r}_B)}{\sigma_A + \sigma_B} + \frac{(\bar{r}_A - \bar{r}_B)}{(\sigma_A + \sigma_B)}\ \sigma_p$$

La figura 5 ilustra la frontera eficiente para los casos de las acciones A y B con correlación perfectamente positiva y perfectamente negativa y tambien el caso de correlacion no extrema de los activos A y B entre [–1; 1] cuando la frontera eficiente entre estas acciones se representa por una curva que corresponde a una función hiperbólica.

Figura 5. Frontera eficiente



Fuente: elaboración propia.

En esta figura los portafolios formados con los activos A y B con correlación perfecta positiva $\rho_{AB} = +1$ se ubican sobre la línea recta entre los puntos B y A. En el punto B de esta recta se localiza el portafolio único B de mínimo riesgo, es decir, no hay portafolio con menor riesgo y la diversificación en este caso no es útil. Cuando la correlación $\rho_{AB} = -1$, es decir perfecta negativa. En este caso, la forma del conjunto factible se parte en dos (ver figura 5), una con pendiente negativa, segmento BC, y otra de pendiente positiva, segmento CB, dependiendo del valor que tome w_B, que en el punto B es $w_B = 1$, valor que comienza a disminuir en el portafolio P hasta el punto C cuando la desviación del portafolio es nula, después de este punto la proporción sigue disminuyendo, pero los portafolios se ubican en el segmento CA manteniendo la correlación $\rho_{AB} = -1$.

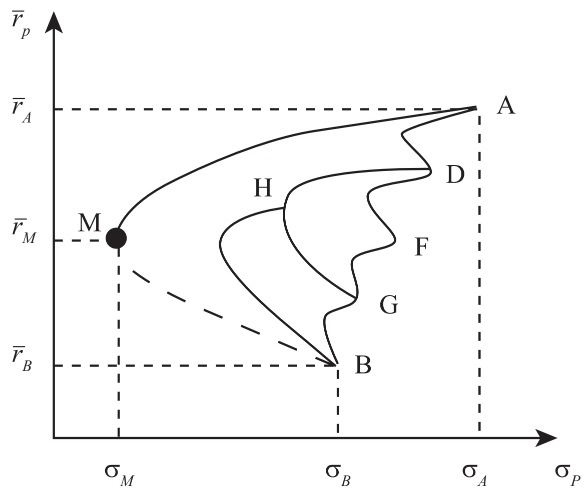
En el caso de correlación negativa perfecta encontramos diversificación útil, puesto que existen portafolios del conjunto factible con menor riesgo y mayor retorno que el del activo B. Por ejemplo, el portafolio de mínimo riesgo es el de desviación estándar nula, localizado en el punto C.

Caso: correlación entre – 1< ρ_{AB} < + 1

Los coeficientes de correlación extremos son más teóricos, lo común es encontrar valores del coeficiente de correlación entre [–1; 1], de manera que el conjunto factible de los portafolios comprende el área del triángulo BAC. En general, el conjunto factible de portafolios combinados con dos o más activos dentro del triángulo tiene forma de sombrillas que representan las ramas de una función hiperbólica localizadas a la derecha del eje vertical tal como se observa de manera particular en la figura 5.

En la figura 6 se dibujaron algunas áreas con forma de sombrillas donde se localizan los conjuntos factibles de portafolios combinados de dos activos y también se grafica esta forma de sombrilla para el conjunto factible de la combinación entre portafolios. Así por ejemplo, se observa la hipérbola que representa la frontera del conjunto factible de los portafolios combinados entre los activos A y D, y similarmente la frontera representada por la hipérbola para los portafolios combinados entre los activos D y G y también la forma de sombrilla para la combinación entre los portafolios H y B.

Figura 6. Conjuntos factibles de portafolios combinados



Fuente: elaboración propia.

En todas estas hipérbolas se observan los portafolios de máximo y mínimo rendimiento, como también los portafolios de máximo riesgo que corresponden a los portafolios únicos, mientras que el portafolio de mínimo riesgo corresponde al punto de inflexión de un portafolio combinado en la figuran 6 señalado con M. Lo anterior es válido para portafolios legítimos, es decir, con proporciones de inversión mayores o iguales a cero. Se puede concluir que hay una relación inversa entre el valor de la correlación [−1; 1] de los rendimientos de los activos y la diversificación del portafolio, es decir, a menor correlación entre los retornos de los activos mayor es la diversificación.

En la figura 6 se aprecia de manera especial la sombrilla delimitada por la hipérbola que pasa por los puntos B, M, A, cuya área contiene el conjunto factible de portafolios. Los portafolios localizados sobre la línea curva entre los puntos M y A inclusive, son los que conforman la denominada frontera eficiente o conjunto eficiente de Markowitz, son portafolios de mínimo riesgo para cada nivel máximo de rendimiento que cumplen con el axioma de la media y la varianza. Todos los demás portafolios son factibles, pero dominados por los portafolios de la frontera eficiente.

Determinación de la frontera eficiente de Markowitz

En la figura 6 la línea M-A es la frontera eficiente, a partir de la cual el inversionista elige el portafolio; para su determinación matemáticamente se requiere obtener primero el rendimiento del portafolio de mínima varianza o desviación estándar (mínimo riesgo). Este portafolio se obtiene resolviendo el valor de la proporción de inversión W_i para cada uno de los n activos, en la siguiente formulación, que asume a W_i como una variable no restringida, es decir, admite la posibilidad de ventas en corto y en este caso la variable es negativa:

$$\text{Minimizar } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \qquad (11)$$

$$\text{Sujeto a: } \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

La función objetivo es equivalente en forma matricial a Minimizar $\sigma_p = w^T \Omega\, w$.

La solución se puede obtener planteando la función y las condiciones de primer orden de Lagrange mediante algún software como solver de Excel.

Si no es permitido o no es habitual asumir posiciones cortas, para obviar el problema de la variable no restringida w_i se agrega la restricción $w_i \geq 0$ que determina la conformación de portafolios óptimos, pero el método de Lagrange no es aplicable por ser esta restricción de desigualdad, así el rendimiento del portafolio de mínima varianza o desviación estándar (mínimo riesgo) se resuelve con software para programación cuadrática, un método de optimización que contempla la función objetivo cuadrática y restricciones de igualdad o desigualdad.

Por lo tanto, el problema por resolver para encontrar el rendimiento de portafolio de mínimo riesgo se formula mediante las siguientes expresiones:

Minimizar $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{w_i w_j} \sigma_{\mathrm{ij}}$ (12)

Sujeto a: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

$w_i \geq 1$

En consecuencia, hallado el portafolio de mínimo riesgo, la frontera eficiente se construye dependiendo de la posibilidad de realizar o no ventas en corto generando exógenamente rendimientos de portafolios por encima del rendimiento del portafolio de mínima varianza encontrado.

1. *Primero cuando se consideran las ventas en corto*, es decir, las ponderaciones de W_i pueden ser negativas; se tienen las siguientes expresiones matemáticas como formulación del problema, el cual puede ser solucionado por el método o la función de Lagrange. En este caso, la frontera eficiente inicia con el portafolio de mínimo riesgo, pero la línea cóncava se extiende ilimitadamente, es decir, se tienen retornos ilimitados de portafolios por permitir las ventas en corto.

Minimizar $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{w_i w_j} \sigma_{\mathrm{ij}}$ (13)

Sujeto a: $\bar{r}_{pk} = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i$

$\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i$

Donde $\bar{r}_{pk}$ es exógena y por encima del rendimiento del portafolio de mínimo riesgo.

2. *Segundo cuando no es posible realizar ventas en descubierto (en corto)*, la frontera eficiente es una función cóncava en el espacio riesgo-retorno que se extiende desde el portafolio de mínima varianza al portafolio de máximo retorno, obteniéndose con la adición de la restricción de no negatividad de Wi, que por ser una desigualdad de la forma ≥ no se puede resolver por el método de Lagrange, sino con la programación cuadrática teniendo la siguiente formulación.

Minimizar $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{w_i w_j} \sigma_{\mathrm{ij}}$ (14)

Sujeto a: $\bar{r}_{pk} = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0$$

Maximizando la utilidad esperada del modelo de Markowitz

El inversionista para solucionar su problema de maximizar la utilidad esperada debe especificar una función de utilidad en términos específicos de la media y la varianza y que sea consistente con el axioma de estas medidas. Esta utilidad máxima la logra en el punto de tangencia de la frontera eficiente con la curva de indiferencia del inversionista en el espacio riesgo-rendimiento. A continuación, retomamos la expresión de la función de utilidad:

Maximizar $UE\,(\bar{r}_p, \sigma_p)$

Sujeto a $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

Una expresión de la función de utilidad propuesta por William Sharpe es:

Maximizar $UE = \overline{r}_p - \frac{\sigma_p^2}{\tau}$ donde $\tau > 0$ y representa la tolerancia al riesgo, de manera que valores mayores de τ significan mayores tolerancias al riesgo y, en consecuencia, valores más grandes de utilidad. Este problema sin restricción a vender en corto se puede resolver como un problema de minimización aplicando una regla de equivalencia y utilizando el método de Lagrange. La regla de equivalencia permite expresar la función de utilidad de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar} - UE = \frac{\sigma_p^2}{\tau} - r_p \qquad (15)$$

Sujeto a $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

Donde $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$ y $\overline{r}_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r}_i$

Modelo de un índice y modelo de mercado

Desde hace más de cincuenta años de los trabajos de Markowitz y otros, la mayoría de las investigaciones durante este tiempo se han concentrado en métodos para la implementación de la teoría básica, con avances muy recientes que contribuyen a facilitar la aplicación para la gestión actual de los portafolios. Los avances han permitido el desarrollo de habilidades para describir los problemas y las soluciones en términos bastante simples, dado que, por una parte, permiten simplificar la cantidad y el tipo de datos de entrada necesarios para el análisis del desempeño de las carteras y, por otra parte, por las aplicaciones que simplifican los procedimientos de computo requeridos para calcular los portafolios óptimos.

En este contexto y para visualizar la complejidad del número de estimaciones requeridas como datos de entrada, considerando a título de ejemplo, una institución pequeña en el concierto mundial como la Bolsa de Valores de Colombia (BVC) que diariamente maneja en promedio en sus transacciones del mercado de renta variable alrededor de 40 acciones, tendría que para hacer el análisis del portafolio determinar 40 retornos esperados, 40 varianzas y 780 coeficientes de correlación determinados por la expresión n(n – 1)/2. Para una organización que maneje 100 stocks, las cifras serían: 100 retornos estimados, 100 varianzas y 4950 coeficientes de correlación.

El reconocimiento de este enorme trabajo ha motivado el desarrollo de matrices de correlación, ya sea como modelos de índices[10] o como técnicas de promedios. Las técnicas utilizadas más ampliamente suponen que el movimiento entre los *stocks* está influenciado básicamente por un índice, del que proviene el nombre de modelo de un solo índice, el cual también se utiliza en pruebas de mercados eficientes y pruebas de equilibrio. El modelo de un índice también se reconoce con otros nombres: modelo diagonal de Sharpe, modelo de mercado,[11] modelo de un solo factor. El modelo constituye una aplicación del análisis de regresión simple lineal que supone una relación entre los rendimientos de una acción ordinaria con los rendimientos de un índice de mercado. Esta relación matemática se obtiene por el método de los mínimos cuadrados para determinar los parámetros de regresión y se representa mediante una ecuación muestral que permite captar las influencias del entorno del mercado, en

[10] El índice puede ser definido en términos de cualquier influencia, no necesariamente como el rendimiento de un índice del stock del portafolio del mercado, puede ser la tasa de aumento pronosticada para el sector industrial o el producto interno bruto entre otros.

[11] El modelo de mercado es idéntico al modelo de un índice excepto que no supone que la covarianza $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ y siempre es definido en términos del portafolio del mercado.

general, y de la empresa, en particular, sobre los retornos de cada uno de los activos. El objetivo del modelo en este caso es predecir los retornos de las acciones y la covarianzas entre activos una vez que se han determinado las estimaciones de los parámetros de regresión conocidos habitualmente como coeficientes de regresión. La manera de captar esta relación con el modelo de mercado se expresa en la siguiente ecuación básica para cada uno de los activos:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i \qquad (16)$$

para todos los *stocks* $i = 1, ..., n$

r_i = retorno del activo i para algún periodo dado (una variable aleatoria).

α_i = intersección, el retorno del activo i independiente de los cambios en el índice del mercado.

β_i = la pendiente, medida del cambio en el retorno del activo i por el cambio unitario del rendimiento en el índice del mercado.

r_m = retorno del índice del mercado para el mismo periodo (una variable aleatoria).

ε_i = error aleatorio, variable con valor esperado de *cero* y varianza $\alpha^2_{\varepsilon i}$.

En la ecuación se observa que el rendimiento de cada activo está relacionado con el rendimiento del mercado y con el parámetro ε_{il}, particular de cada activo i que captura las características específicas de la empresa. Los siguientes son supuestos relacionados con el error aleatorio ε_{il} conocido como "perturbación estocástica":

- El valor esperado de las perturbaciones ε_i es igual a cero: $E(\varepsilon_i) = 0$.
- Las perturbaciones están uniformemente distribuidas (varianza) $E(\varepsilon_i)^2 = \sigma^2_\varepsilon$ es constante (homocedasticidad).
- Las perturbaciones están incorrelacionadas: covarianza $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$.
- Las perturbaciones están incorrelacionadas con el rendimiento del índice covarianza $(\varepsilon_i, r_m) = 0$, es decir, estas dos variables se consideran independientes.

Se deduce de los dos últimos supuestos que los rendimientos de los valores solamente están correlacionados con los rendimientos del índice del mercado. En cuanto a la pendiente del modelo, también se conoce como *beta* y es igual al cociente entre la covarianza de los retornos del activo con los retornos del índice del mercado sobre la varianza del mercado, si el rendimiento de un valor refleja el mismo rendimiento del índice del mercado tendrá beta igual a uno y un intercepto igual a cero. Los valores con betas mayores de 1 se conocen como valores agresivos y tiene mayor volatilidad que el rendimiento del mercado, mientras los activos con betas menores a 1 se llaman valores defensivos y son menos volátiles que el índice del mercado. El beta de un valor se calcula así:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma^2_m} \qquad (17)$$

El otro parámetro del modelo, el intercepto α_i se calcula así:

$$\alpha_i = \bar{r}_i - \beta_i \bar{r}_m \qquad (18)$$

Las soluciones anteriores a las dos incógnitas de modelo se deducen si se obtiene un sistema de dos ecuaciones denominadas normales, mediante derivadas parciales para minimizar la suma de los errores cuadráticos o empleando sumatorias a partir de la ecuación básica $r_i = \alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i$.

De esta manera el cálculo para cada uno de los stocks, del retorno medio, la varianza de los rendimientos y la covarianza entre activos se facilitan empleando las siguientes expresiones:

$$\bar{r}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{r}_m \tag{19}$$

$$\sigma_i = \beta_i^2\, \alpha_m^2 + \alpha_{\varepsilon i}^2 \tag{20}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_{\mathrm{m}}^2 \tag{21}$$

La expresión anterior de la varianza en el modelo del mercado para valores, capta el riesgo total de un valor y el primer sumando $\beta_{\mathrm{i}1}^2\ \sigma_1^2$ identifica el riesgo del mercado llamado también riesgo sistemático caracterizado porque no es diversificable, mientras el segundo sumando $\sigma_{\varepsilon i}^2$ es conocido por varios nombres: riesgo único, no sistemático, específico,[12] el cual es diversificable en la medida que se adicionen más activos al portafolio.

Un último aspecto básico en el modelo de un índice es el coeficiente de determinación que es equivalente al grado de riesgo sistemático. Este coeficiente es el cuadrado del coeficiente de correlación y asume un valor entre [0; 1], generalmente, se expresa porcentualmente y mide el grado en que la relación de tipo lineal con el índice del mercado explica los cambios en el retorno del valor, de manera que si el coeficiente tiende a 1 el comportamiento del mercado explica en alto grado la variación de los rendimientos del activo y en consecuencia el riego sistemático el alto.

Rendimiento esperado, varianza y beta de la cartera con el modelo de un índice

De acuerdo con la expresión (1), si los fondos invertidos en el activo se representan con el rendimiento de esta cartera de manera implícita es:

$r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i\, r_i$ y como $r_i = \alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon i$

Entonces se tiene la expresión para el rendimiento de un portafolio en función de los parámetros del modelo de un índice así:

$$rp = \sum_{i=1}^{n} w_i\,(\alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i) \tag{22}$$

A partir de esta expresión el valor esperado, la varianza y el beta del portafolio están dados por las siguientes ecuaciones:

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} w_i\,(\alpha_i + \beta_i \bar{r}_m) = \sum_{i=1}^{n} w_i\,\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} w_i\,\beta_i \bar{r}_m \tag{23}$$

Sea el intercepto del portafolio $\alpha_p = \sum_{i=1}^{n} w_i\,\alpha_i$

y el beta del portafolio $\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i\,\beta_i$ (24)

Es decir que los dos parámetros correspondientes al portafolio son promedios ponderados por las proporciones de inversión y entonces el rendimiento esperado del portafolio $\bar{r}_p$ se puede expresar en función de los parámetros del modelo de un índice y del rendimiento promedio del índice del mercado $\bar{r}_m$ así:

$$\bar{r}_p = \alpha_p + \beta_p \bar{r}_m \tag{25}$$

Al aplicar las propiedades de la varianza a la expresión (22) del rendimiento del portafolio la varianza de la cartera queda expresada como:

$$\alpha_p^2 = (\textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i)^2\ \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 = \beta_p^{\,2} \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 \tag{26}$$

Así, el primer sumando constituye el riesgo sistemático del mercado y el segundo sumando el riesgo diversificable.

[12] Los factores específicos de las empresas que influyen en la modificación del riesgo, por ejemplo, son la obtención de una patente, un accidente industrial, entre otros.

Referencias

Alexander, G., Sharpe, W. y Bailey, J. (2003). *Fundamentos de inversiones teoría y práctica* (3ª ed.). México: Pearson Education.

Bernoulli, D. (1954) .Exposition of a new theory on the management of risk. *Econométrica, 22 (1),* 23-36.

Cruz, J., Villareal, J. y Rosillo, J. (2003). *Finanzas corporativas valoración, políticas de financiamiento y riesgo teoría y práctica* (2ªed.). Bogotá: Thomson.

Elton, E. J., Gruber, M. J. , Brown, S. J. y Goetzmann, W. N. (2007). *Modern portfolio theory and investment analysis.* (7ª ed.). New York, NY: John Wiley & sons.

Fuquen, J. M. (2010).Antecedentes ,fundamentos teóricos y conceptuales del CAPM Estándar. *Gestión & Sociedad, 2* (2), 141-156.

Grinblatt, M. y Titman, S. (2003). *Mercados financieros y estrategia empresarial.* Madrid: McGraw Hill.

Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The Review of Economics and Statistics, 1* (47), 13-37.

Markowitz, H. M. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance, 1 (7),* 77-91.

Markowitz, H. M. (1991). Foundations of portfolio theory. *The Journal of Finance, 2* (46), 469-477.

Perold, A. F. (2004). The capital asset pricing model. *The Journal of Economic Perspectives, 3* (18), 3-24.

Sharpe, W. F. (1963). Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance, 3* (19), 425-442.

Sharpe, W. F. (1974). *Teoría de cartera y del mercado de capitales.* Bilbao: Ediciones Deusto.

Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies, 2* (25), 65-86.

Varian, H. R. (2004). *Microeconomía intermedia: un enfoque actual* (7ª ed.). Barcelona: Antoni Bosch.