[Gestión y Sociedad](https://ciencia.lasalle.edu.co/gs)

Volume 3 | Number 1 Article 9

2010-06-01

Antecedentes y fundamentos teórico-conceptuales del CAMP estándar

José Manuel Fuquen
Universidad de La Salle, Bogotá, jfuquen@unisalle.edu.co

Antecedentes y fundamentos teórico-conceptuales del CAMP estándar

José Manuel Fuquen*

Recibido: 4 de octubre de 2009 – **Aprobado**: 4 de diciembre de 2009

Resumen

El objetivo de este artículo es indagar y presentar, con base en ideas originales, la teoría y principales antecedentes teóricos y conceptuales de uno de los modelos más importantes de la teoría moderna del portafolio, *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), desarrollado independientemente en su forma estándar en los setenta por Sharpe, Treynor, Lintner y Mossin. Este modelo microeconómico descriptivo de equilibrio general se ha derivado con diferentes grados de rigor, matemáticas complejas y construcción de modelos de portafolio como agregados del comportamiento inversionista. EL CAPM proporciona una solución para el problema de selección óptima de portafolios de activos riesgosos que deben poseer inversionistas quienes asumen maximizar el valor de un orden de preferencias considerando precios y distribución de probabilidades de los rendimientos derivados de un conjunto de datos; explica la fijación de precios de carteras en un mercado de activos en equilibrio a partir de la relación entre rendimiento y riesgo de portafolios en un entorno de resultados inciertos. Se expone una breve reseña histórica y temas trascendentes del desarrollo del CAPM estándar: el comportamiento del inversionista en condiciones inciertas; el modelo de equilibrio del mercado de capitales y la fijación de precios de los activos de capital.

* Profesor Facultad de Ciencias Administrativas y Contables de la Universidad de La Salle. Correo electrónico: jfuquen@unisalle.edu.co

Palabras clave

CAPM, equilibrio general, portafolio, rendimiento, riesgo.

Abstract

The purpose of this article based on seminal ideas is investigating and offering the main theoretical and conceptual fundaments previous to the most important models of the modern theory of the portfolio known as the Capital Asset Pricing Model –CAPM– developed independently as standard form during 70's by Sharpe, Treynor, Lintner and Mossin. This microeconomic descriptive model of general balance has been derived with different rigor degrees, complex mathematics and a construction of portfolio models like aggregates of the investors' behavior. The CAPM provides a solution for problem of selecting optimal portfolios of risky assets that investors should possess assuming to maximize the value of preference order considering prices and distribution of probabilities of the derived yields from a data set, but also explains the price fixation in a market of assets in balance from the relation between the portfolios yield-and-risk in an uncertain results environment. Also there is a brief historical review and the outstanding topics of the development of the standard CAPM – the behavior of the investor under uncertainty conditions; the model of the capital market balance and the price fixing of the capital assets.

Keywords

CAPM, general balance, portfolio, yield, risk.

Introducción

En la teoría del portafolio ninguno de los trabajos desarrollados hasta 1960 para seleccionar activos se extendió para construir una teoría del mercado en equilibrio de precios de activos en condiciones de riesgo. Así, Von Neumann y Morgenstern (1944) propusieron el modelo de "máxima utilidad esperada" y posteriormente Markowitz (1952) presentó el modelo de "media-varianza" como solución general para el problema de selección del portafolio. Tobin ilustró que el modelo de Markowitz, en ciertas condiciones, implicaba que el proceso de selección de la inversión se podría dar en dos fases: la elección de un único portafolio óptimo de activos riesgosos y una asignación de fondos entre el portafolio de activos riesgosos y un solo activo libre de riesgo, pero no se disponía de algún estudio por la época mencionada que, además, de estructurar una teoría microeconómica positiva bajo condiciones de riesgo se sumara a las predicciones del comportamiento del mercado de capitales y describiera el precio del riesgo como resultado, entre otros aspectos, de las influencias básicas de las preferencias de los inversionistas y de los atributos físicos de los activos de capital, lo cual dificultaba establecer una relación significativa entre el precio de un activo y su riesgo. Dentro de los métodos para establecer la dirección futura de los precios de los valores de los mercados se encuentran el análisis fundamental y el análisis técnico, conocido también como 'chartismo'. Desde la perspectiva bursátil de inversión a largo plazo, el análisis fundamental se lleva a cabo con los datos contables y financieros de las empresas para estimar el valor intrínseco de la acción, conocido asimismo como valor fundamental, el cual se compara con el precio del mercado y se establece si el precio de la acción en el mercado está sobrevaluado, subvalorado o corresponde al valor justo en comparación con lo que se cree o percibe como correcto. Los analistas técnicos –sin tener en cuenta la información fundamental financiera y contable de las empresas– consideran la hipótesis de los mercados eficientes para plantear que los precios de los activos del mercado reflejan toda la información que se conoce y el comportamiento de los inversionistas, de tal manera que con diversas técnicas se estudie, a partir de los datos históricos, las tendencias de la demanda de estos mercados a fin de predecir en el corto plazo los movimientos en los precios de los mercados accionarios.

Este trabajo se centra en las principales bases conceptuales y en el modelo derivado de un marco teórico microeconómico positivo que trata el estudio, la descripción de las decisiones de los inversionistas en el mercado de activos en condiciones de riesgo y la explicación de la formación de los precios a partir de la relación entre riesgo y retorno esperado. El desarrollo de esta teoría considera el modelo de determinación de los precios de los activos de capital –conocido en su primera versión como *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Otros aspectos de este escrito se refieren a unos breves antecedentes históricos, y a los temas fundamentales para el desarrollo del CAPM: el comportamiento del inversionista en condiciones de incertidumbre; el modelo de equilibrio del mercado de capitales y la fijación de precios de los activos de capital.

Antecedentes históricos y conceptos

El valor esperado constituye un pilar conceptual para el desarrollo del CAPM. Se considera al trabajo *Libellus de Ratiotiniis in Ludo Aleae* de Huygens (1657) como el primer estudio que determinó el valor esperado, expectativa (esperanza) matemática, o simplemente promedio referido al caso de resultados igualmente probables, a partir de los cuales se calculó el valor esperado para *2* ganancias y para *n* ganancias. Posteriormente, con probabilidades diferentes, determinó el valor esperado para dos ganancias y generalizó para *n* resultados.

El médico y matemático suizo Daniel Bernoulli (1738) se refiere en un trabajo a la proposición del valor esperado, que por la época constituiría la base de todos los matemáticos que estudiaban la medición del riesgo y, de otra parte, ilustra gráfica y matemáticamente la relación más general entre la utilidad y la riqueza. A partir de la hipótesis de la utilidad esperada, Bernoulli solucionó el problema de la famosa paradoja de San Petersburgo planteada por su primo Nicholas Bernoulli en 1713. Sin embargo, el profesor Cramer había dado la misma solución en 1728. El problema consistía en determinar el retorno esperado del juego de lanzar una moneda equilibrada hasta que apareciera una cara sabiendo que el jugador gana 2^nducados si la primera cara sale en el lanzamiento *n*-ésimo. Así, el valor esperado de este juego o ganancia media es infinito.

Bernoulli, entonces, desarrolló dos conceptos importantes para la economía; la dependencia de la utilidad de la riqueza de las personas, a partir de la función logarítmica de la forma Y = blogx/α donde Y= utilidad, b es una constante, x corresponde a la riqueza final y α es la riqueza previa, asociando la idea famosa de la utilidad marginal decreciente. El otro concepto se refiere a que las personas evalúan el riesgo, no por el retorno esperado que produce ese riesgo, más bien por la utilidad esperada que genera ese riesgo. Gossen (1854), canalizando la idea de Bernoulli, formuló la ley de la utilidad marginal decreciente: la satisfacción suplementaria obtenida por el consumo de un bien disminuye progresivamente a medida que aumenta la cantidad consumida, hasta llegar a ser nula cuando se alcanza la saciedad (e incluso negativa). Su contribución fue previa a la llamada Revolución Marginalista (1871-1874) que hace referencia a la economía neoclásica. Así la utilidad marginal decreciente de Bernoulli se constituyó en el eje de otros trabajos como los de Jevons (1871), Menger (1871) y Walras (1874), quienes proponen el principio de la utilidad límite. No obstante, la hipótesis de Bernoulli de la utilidad esperada, con algunas excepciones como Marshall (1890) y Edgeworth (1911), sólo fue acogida con la aparición de la obra Theory of Games and Economic Behavior del matemático John Von Neumann y el economista Oskar Morgenstern (1944), que extendió la teoría de la utilidad esperada asumiendo axiomas del comportamiento del individuo en condiciones de riesgo y constituyéndose en la base de la teoría de los juegos y en un paradigma del proceso de toma de decisiones.

Asimismo, Harry Markowitz (1952,1959) y Roy (1952) desarrollan la teoría del portafolio ilustrando cómo constituir portafolios de inversiones individuales que optimicen la relación entre riesgo y retorno. Markowitz precisó la formulación del problema de selección de carteras en términos del primer y segundo momento de la variable aleatoria, conocidos como la media y la varianza del rendimiento. James Tobin[1], en febrero de 1958 en el artículo "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", crea el concepto de dominancia de un portafolio combinado de activos riesgosos y el activo monetario libre de riesgo.

En efecto, el entorno inicial del CAPM estuvo caracterizado por los nuevos fundamentos de la teoría de las decisiones bajo incertidumbre y por el desconocimiento empírico de los factores de riesgo y de retorno en el mercado de capitales. El primer estudio sobre retornos y desviación estándar se realizó en la bolsa de Nueva York (NYSE) por parte de Fisher y Lorie (1964) y consideró diferentes periodos desde 1926, pero la desviación estándar del stock de retornos de mercado se publicó cuatro años después. Ibbotson y Sinquefield (1976) hallaron estimaciones de la prima de riesgo de los activos y determinaron para el periodo de 1926 a 1974 el retorno promedio del 10,9% por año del Standard and Poor 500 Index (S&P 500)[2] y un exceso de retorno sobre los bonos del tesoro del 8,8% por año. Dimson and Brealey (1978) producen el primer estudio histórico en el UK[3] de la prima de riesgo de los activos con un 9,2% entre 1919-1977.

El modelo de apreciación de activos de capital, CAPM –desarrollado en la década de los setenta inicialmente por William Sharpe (1964), Jack Treynor (1962), John Lintner (1965) y Jan Mossin (1966) y el modelo alternativo *Arbitrage Pricing Theory* (APT) propuesto por Ross (1976)– plantean la Teoría Moderna del Portafolio y buscan

[1] Nobel Laureado en Economía en 1981 por su trabajo 'Análisis de Mercados Financieros' y su relación con las decisiones del gasto, empleo, producción y precios.

[2] Índice ponderado por la capitalización del mercado de 500 acciones representativas de todas las industrias de Estados Unidos.

[3] Sigla originada en Reino Unido de Gran Bretaña e Irlanda del Norte, comúnmente conocido como United Kingdom.

explicar cómo se determinan los precios de los activos que conforman las carteras o portafolios en un mercado competitivo, en el cual la oferta y la demanda se igualan estableciendo "precios de equilibrio" sostenidos por todos los inversionistas.

Después de las primeras publicaciones del CAPM, aparecen versiones importantes extendidas del modelo que incorporan aspectos reales, como la de Lintner (1969) enfocada a los retornos en términos reales; Brennan (1970) estudia los efectos de los impuestos; Black (1972) contempla el activo libre de riesgo; Merton (1973 y 1987) incorpora las oportunidades futuras de inversión y segmentación del mercado respectivamente; Rubinsteins (1974) trata con una clase más general de funciones de utilidad; Kraus y Litzenberger (1976) consideran el tercer momento de la distribución de los retornos; Levy (1978) incluye los costos de la transacciones; Breeden (1979) enfocando las preferencias por los consumos de los inversionistas, Solnik (1974), Stulz (1981), Adler y Dumas (1983) se extienden a las inversiones internacionales; Markowitz (1990), restricciones de ventas en corto; Sharpe (1990) contempla la valoración de los activos con y sin posesiones negativas.

Comportamiento del inversionista bajo incertidumbre

Al no existir certeza sobre los precios futuros de los activos, éstos se tornan riesgosos y hacen de la incertidumbre la esencia para analizar el comportamiento racional del inversionista y considerar la diversificación como una práctica común y razonable para disminuir la incertidumbre. La teoría económica destaca dos modelos normativos de elección que tratan los activos en condiciones de incertidumbre y guían el proceso de los inversores de acuerdo con el principio de la optimización: la teoría de la utilidad esperada[4] desarrollada por el matemático húngaro-estadounidense de ascendencia judía John Von Neumann y el economista alemán Oscar Morgenstern[5], que tiene como primer referente histórico a Bernoulli (1738). El otro modelo normativo corresponde a los trabajos del economista estadounidense, profesor de la City University of New York y Premio Nobel de Economía, Harry Markowitz (1952 y 1959), materiales publicados en el artículo pionero *Selección del portafolio*, y en el libro *Selección del Portafolio: Diversificación eficiente de inversiones*. Complementa este enfoque normativo el trabajo del también premio Nobel James Tobin (1958)[6]. En estos modelos se asume que el inversionista tiene preferencias razonables y ordenadas sobre los diferentes planes de inversión contingentes (planes que ofrecen resultados inciertos y eventuales que pueden ocurrir o no) con base en la distribución de probabilidades de los posibles resultados futuros de las inversiones y las expectativas derivadas de variables aleatorias y relativas a los verdaderos retornos de la inversión.

En el modelo de máxima utilidad de Von Newmann–Morgenstern, el atractivo sobre las diferentes opciones, generadoras de riqueza, determina la ordenación, las relaciones y los supuestos importantes de las preferencias conocidos como axiomas de completitud, reflexividad y transitividad. Las relaciones entre dos opciones pueden ser de preferencia estricta si siempre se prefiere la misma opción; de indiferencia, cuando le resulta indiferente elegir

4 Sus limitaciones empíricas y conceptuales han dado origen a las Teorías de la Utilidad no Esperada.

5 *Theory of Games and Economic Behavior.*

6 *Liquidity Preference as Behavior Towards Risk.*

entre las dos opciones y de preferencia débil si el individuo prefiere una de las dos opciones o es indiferente entre ellas. Este comportamiento del inversor se puede formular en función de las preferencias bajo los axiomas anteriores y dados otros supuestos. Las preferencias se pueden describir gráficamente con curvas de indiferencia que además de tener las propiedades de que nunca se cortan (por la contradicción que surge entre las relaciones demostrable con los axiomas), crecen hacia la derecha, representan una utilidad medible y diferentes niveles de preferencias. Tales preferencias ordenadas se pueden expresar como funciones de utilidad[7], lineales o no lineales, utilizando una escala ordinal y asignando números de la recta numérica a cada preferencia. Una función de utilidad puede transformarse en otra función de utilidad monótonamente[8], creciente con una tasa de variación positiva, que represente las mismas preferencias débiles.

En el modelo de Von Newmann–Morgenstern, el inversionista en condiciones de incertidumbre elige la opción con la utilidad máxima esperada evaluando toda la distribución de probabilidades, pero al no tener en cuenta el riesgo de las opciones como la dispersión alrededor de la media, se puede dar el caso de indiferencia en la elección entre dos planes de inversiones con la misma utilidad máxima esperada. Para ilustrar el valor esperado y la utilidad esperada, considérese que se requiere ordenar las acciones de una bolsa de valores de acuerdo con nuestras preferencias y elegir una acción entre todas suponiendo el mismo precio ($ 1500)para cada una y tres eventos relacionados con el precio: el precio sube $80 , se mantiene o el precio baja $50. Supóngase, asimismo, que para estos tres eventos de una acción X , se tienen las probabilidades 0.3; 0.2 y 0.5, respectivamente. Al comparar la distribución de probabilidades de la acción X con las distribuciones de las demás acciones se elegirá aquella distribución que proporcione una mayor utilidad. Entre el infinito número de distribuciones existen tres acciones "seguras", en las cuales un evento tiene probabilidad de uno y los otros dos eventos tienen probabilidad de cero: con una probabilidad de 1 la acción sube $80; o no cambia de precio o la acción baja $50. La asignación de las utilidades a las acciones "seguras" permite el ordenamiento $U(\$1580) > U(\$1500) > U(\$1450)$. Con base en la función de utilidad de Von Newmann-Morgenstern la utilidad esperada se determina como:

$$UE = \sum \mathrm{U(Pr)} * \mathrm{P(Pr)} \qquad (1)$$

donde Pr = precio, P = probabilidad, y *UE* la utilidad esperada de la distribución de probabilidades. Para el caso de las acciones "seguras" (eventos mutuamente excluyentes), se conserva la ordenación de las utilidades esperadas de las acciones:

$$UE\,(1,0,0) = U(1580) * 1+0+0 > UE(0,1,0) = 0+U(1500) * 1+0 > UE(0,0,1) = 0+0+U(1450) * 1$$

Con las probabilidades dadas de 0,2; 0,3; 0,5, la utilidad esperada de la acción X es: $UE = U(1580) * 0{,}3 + U(1500) * 0{,}2 + U(1450) * 0{,}5$

Considerando la siguiente expresión de valor esperado del precio

[7] En economía, el término *utilidad* significa o se refiere a la satisfacción que los individuos obtienen de sus actividades económicas

[8] La transformación monótona cambia una serie de números de una función de utilidad a otros números mediante operaciones; por ejemplo, de adición de una constante, multiplicación por un número, elevación a una potencia, etc., de tal forma que la nueva expresión de utilidad representa las mismas preferencias

$$VE = \Sigma_{i=1}^{n} \Sigma(Pr) * P(Pr) \qquad (2)$$

donde Pr = precio y $P(Pr)$ = probabilidad del precio, se tiene

$$VE = 1580 * 3 + 1500 * 0{,}2 + 1450 * 0{,}5 = 1499,$$

la utilidad del valor esperado del precio de la acción X se expresa como:

$$U(VE) = U(1580 * 0{,}3 + 1500 * 0{,}2 + 1450 * 0{,}5) = U(1499)$$

Los inversionistas tienen diferentes ordenamientos de las preferencias ante el riesgo. Un inversionista puede ser visto como neutral ante el riesgo, adverso o amante del riesgo dependiendo de la relación entre la utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern y la utilidad del valor esperado. Para el inversionista neutral al riesgo, la utilidad esperada de la riqueza es equivalente a la utilidad de su valor esperado, es decir, si para un inversionista el dinero es utilidad, $ 10 millones con certeza son equivalentes a una distribución de probabilidades con valor esperado de $ 10 millones. Para un inversionista adverso al riesgo, $ 10 millones con certeza es mejor que un valor esperado de $ 10 millones, a no ser que la distribución de probabilidades sea muy favorable. En el caso del inversionista amante de correr riesgos, preferiría los $ 10 millones de valor esperado a obtener $ 10 millones con certeza, a no ser que la distribución de probabilidades sea muy desfavorable. La figura 1 ilustra un inversionista adverso al riesgo que adquiere acciones por $ 50 millones y espera una riqueza adicional de $ 40 millones o pérdida por $ 40 millones, resultados igualmente probables con una función de utilidad de la riqueza cóncava construida con la siguiente expresión:

$U(W) = -0.0025\, W^2 + 0.5W$ donde W = riqueza.

$$VE = \Sigma_{i=1}^{n} (\mathrm{Wi}) * P(\mathrm{Wi}) = 90 * 0{,}5 + 10 * 0{,}5 = 50$$

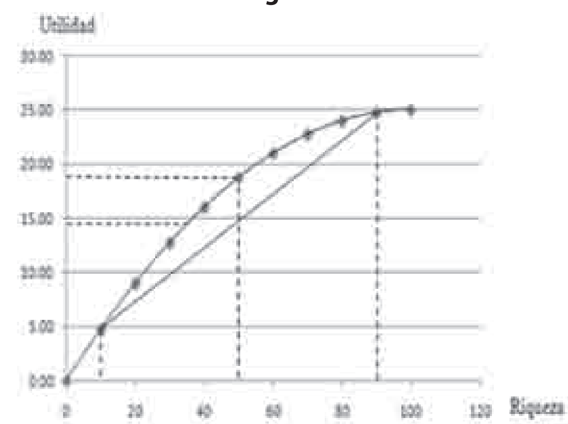
$$U(50) = -0{,}0025 * 50^2 + 0{,}5 * 50 = 18{,}75$$

$$U(90) = -0{,}0025 * 50^2 + 0{,}5 * 90 = 24{,}75$$

$$U(10) = -\ 0{,}0025 * 50^2 + 0{,}5 * 10 = 4{,}75$$

$$VE = \Sigma_{i=1}^{n} U(\mathrm{Wi}) * P(\mathrm{Wi}) = U90 * \frac{1}{2} + U(10) * \frac{1}{2} = 27{,}75 * \frac{1}{2} + 4{,}75\, \frac{1}{2} = 14{,}75$$

Figura 1.



Fuente: elaboración del autor.

Así, para un inversionista que no desea correr riesgos, la utilidad del valor esperado de la riqueza 18,75 es mayor que la utilidad esperada de la riqueza 14,75. Otros ejemplos de construcción y aplicación de funciones de utilidad se encuentran en una tabla de Levy–Markowitz (1979), sobre los retornos anuales de 149 portafolios, expresados así:

$$U(R) = \mathrm{Log}(1 + R);\ U(R) = (1 + R)^{\alpha}$$

El análisis comparativo, en función de la utilidad esperada, extendido a la conformación de portafolios, no es adecuado y el problema se torna más complejo porque existen infinito número de distribuciones de probabilidad que hacen prácticamente imposible aplicar y maximizar la función de Von Newmann-Morgenstern.

Por otra parte, Markowitz, en su trabajo pionero[9], normativo de la media-varianza, inicialmente expone dos reglas de comportamiento del inversor que contrasta con su regla propuesta de retornos esperados y varianza de los retornos esperados. Este proceso de selección no considera lo que concierne a la observación, al conocimiento y la experiencia con las creencias relevantes del desempeño futuro de los valores. Markowitz rechaza dos reglas para guiar el comportamiento del inversionista. La primera regla o norma –objeto del rechazo– se refiere a que el inversor debe maximizar los retornos esperados o anticipados descontados. Al respecto expone: la regla no implica diversificación; se desconoce si los retornos se conforman a la misma tasa o tasas diferentes de descuento y no considera cómo se deciden las tasas y su posible variación con el tiempo. Además, si se presentan dos valores esperados iguales de grandes simplemente cualquiera constituye la mejor opción y no acepta la regla que se apoya en la ley de los grandes números. Esta regla establece que el inversor debe diversificar entre todos los activos que produzcan un retorno máximo esperado. Dicha ley en este contexto asegura que los rendimientos actuales del portafolio serán prácticamente iguales a los retornos esperados, suponiendo que hay un portafolio con el retorno esperado máximo y de mínima varianza recomendado para el inversor. Los aspectos que motivan esta vez el rechazo se dan por no considerar que los retornos de los activos están intercorrelacionados; la diversificación no puede eliminar toda la varianza y el portafolio de máximo retorno esperado no es necesariamente el de mínima varianza.

Markowitz analizó e ilustró el análisis geométrico de la regla de retorno esperado (E); la varianza de los retornos esperados (V) y la exclusión de las ventas en corto10 con base en tres y cuatro títulos, y no con n valores. Consideró para una variable aleatoria discreta las siguientes expresiones matemáticas:

Valor esperado

$$E(Y) = P_1Y_1 + P_2Y_2 + ... + P_nY_n \qquad (3)$$

Varianza

$$V(Y) = P_1[Y_1 - E(Y)]^2 + P^2[Y^2 - E(Y)]^2 + \dots + Pn[Yn - E(Y)]^2 \qquad (4)$$

Definida la variable aleatoria R como resultante de la suma ponderada de *n* variables aleatorias *Ri*. El valor esperado y la varianza de R están relacionados con la distribución de probabilidades de *Ri* así:

$$R = \alpha_1R_1 + \alpha_2R_2 + ... + \alpha_nR_n \qquad (5)$$

$$E(R) = \alpha_1E(R_1) + \alpha_2E(R_2) + ... + \alpha_nE(R_n) \qquad (6)$$

$$V(R) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \ v(R_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1+1}^{N} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} \qquad (7)$$

donde σ_{ij} representa la covarianza entre la variable aleatoria R_i y R_j

Si la variable R representa el rendimiento del portafolio combinado de tres valores; R_i el rendimiento o retorno para los activos (tanto R como R_i son variables aleatorias); X_i el porcentaje de la inversión hecho en el activo R_i y μ_i es el valor esperado del activo R_i, es decir $\mu_i = E(R_i)$, entonces se tiene para el caso de 3 títulos valores:

$$E(R) = \sum_{i}^{3} = 1X_i\mu_i \qquad (8)$$

$$V(R) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i x_j x\sigma_{ij} \qquad (9)$$

[9] Hecho en la comisión Cowles para la Investigación en Economía con financiamiento del Consejo de Investigación de las Ciencias Sociales.

[10] En el momento de la operación de venta no se dispone de valores y se toman prestados para posteriormente comprarlos y cubrir el préstamo.

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \qquad (10)$$

$$x_i \geq 0 \qquad (11)$$

Para i=1,2,3

Adicionalmente, hace

$$X_3 = 1 - X_1 - X_2 \qquad (12)$$

Al graficarse sobre un plano de coordenadas X_1, X_2 las restricciones (11) y (12) se obtiene un triángulo que representa todas las combinaciones X_1, y X_2 factibles. Sobre este plano traza las líneas isomedias correspondientes a varios valores esperados, para lo cual procede a sustituir en (8) el valor de X_3 deducido en (12), obteniendo la expresión transformada:

$$E(R) = \mu 3 + X1 (\mu 1 - \mu 3) + X2 (\mu 2 - \mu 3) \quad (8´)$$

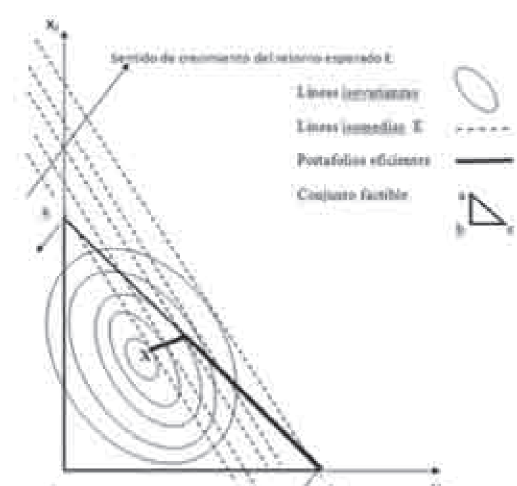
y despejando para X_2 se trazan las líneas isomedias. En cada línea isomedia se encuentran todos los portafolios (puntos o combinaciones X_1, X_2) para un retorno esperado dado. De manera similar, se trazan las líneas isovarianzas que conforman una familia de elipses concéntricas. Cada línea isovarianza contiene todos los portafolios para una varianza de retorno dada. Estas líneas se obtienen con la siguiente expresión deducida a partir de (9) y con la sustitución presentada en (12), se tiene para la varianza[11] la expresión (9´):

$$V(R) = X_1^2(\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}) + X_2^2(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2X_1X_2\,(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}) + 2X_1(\sigma_{13} - \sigma_{33}) + 2X_2(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{33} \quad (9)$$

En la figura de Markowitz, el punto X puede caer dentro o fuera del conjunto factible. Cuando cae dentro como en la figura 2, X es el centro del sistema que minimiza la varianza y, por tanto, la combinación X_1, X_2 en ese punto es eficiente, no hay ningún otro portafolio que tenga una varianza menor para el mismo valor del retorno esperado o para uno mayor, o un retorno esperado más grande con la misma o menor varianza, y tal punto es el comienzo del conjunto eficiente.

Cuando las líneas isomedias hacen tangencia con las líneas isovarianzas, la varianza toma su valor menor, pero en la medida en que las isovarianzas se alejan del punto X, la varianza es mayor. El conjunto eficiente está formado por dos partes en este plano; la primera parte constituida por el segmento, de la línea crítica, desde X hasta el intercepto con la frontera eficiente y la segunda parte por el segmento que inicia en este intercepto, y se dirige sobre el límite eficiente hasta b.

Figura 2.

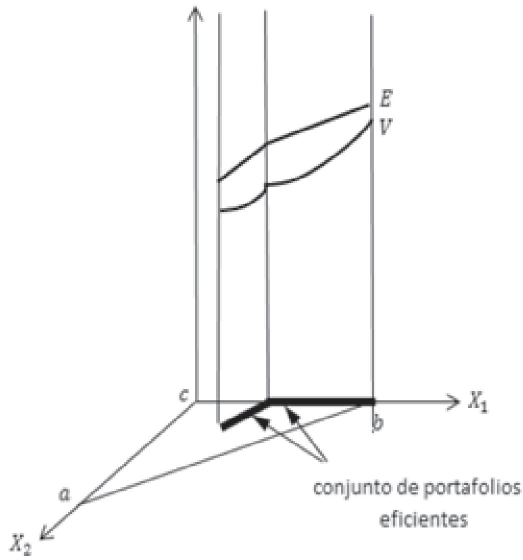


Fuente: elaboración del autor.

Dada la naturaleza observada de las combinaciones del conjunto de portafolios eficientes para el caso de tres activos y de acuerdo con las expresiones (8') y (9'), el valor esperado

[11] La cual tiene la forma de $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y con un discriminante de $B^2 - 4AC < 0$, la gráfica es una elipse-paraboloide elíptico.

Figura 3.



Fuente: elaboración del autor.

E y varianza V es un plano y un paraboloide, respectivamente. Si se grafican los puntos V, E para cualquier número de portafolios eficientes se obtiene una serie de segmentos de parábolas conectadas como se aprecia en la figura 3 de Markowitz. El modelo no establece en cuáles y en cuantos activos invertir, aunque es una hipótesis explicativa del comportamiento del inversionista y una guía importante para la toma de decisiones, diferenciada de las conductas especulativas, lo que implica una eficiente diversificación sin depender del número de activos elegidos aleatoriamente, ingenua o intuitivamente o de invertir en portafolios de muchas acciones en búsqueda de una varianza pequeña. La diversificación eficiente, planteada por Markowitz, tiene en cuenta la covarianza de tal forma que se esperaría tener un portafolio conformado por acciones de empresas de diferentes industrias o sectores diferenciados por características económicas que tienden a tener entre las acciones una covarianza más baja que, por ejemplo, la apreciada en empresas del mismo sector. El modelo resuelve, a partir de un número de activos que conforman un portafolio o cartera, en qué proporciones invertir en cada uno de ellos. El proceso de selección del portafolio sugerido por Markowitz menciona la estimación probabilística de los retornos futuros de los títulos o valores, la determinación de los portafolios eficientes basado en el análisis de estas estimaciones y en la selección de los portafolios más apropiados por los inversionistas según sus preferencias. Es una técnica para construir la frontera dominante de portafolios o carteras más eficientes en media-varianza bajo los supuestos de que los inversores son optimizadores de estos dos parámetros y el supuesto de que los mercados financieros operen sin fricciones; sin regulaciones o consecuencias impositivas por la compra o venta de activos, todas las inversiones son negociables a cualquier precio en cantidades bien sea positivas o negativas como las ventas al descubierto (en corto) y que no hay costos por las transacciones. La media y la varianza se obtienen estadísticamente con datos históricos y luego se pueden ajustar por el juicio práctico derivado de atributos o matices no incluidos en los cálculos. Además, estas medidas se utilizan en el análisis teórico para indagar por los efectos de los cambios en las creencias que de las firmas se tienen y los cambios en general de las preferencias por los retornos esperados *versus* las variaciones de la oferta de los títulos valores.

El aporte principal y explícito del enfoque de Markowitz consiste en suponer que el comportamiento racional del inversor implica buscar aquella composición de la cartera que haga máxima la rentabilidad de la cartera para determinado nivel de riesgo de ésta, o bien, un mínimo riesgo de la cartera para un nivel de rentabilidad, teniendo en cuenta el conjunto total de portafolios a partir de un número de distintos activos riesgosos. Se supone que los inversionistas desearan elegir entre todas las carteras o planes de inversión riesgosos[12] aquellas carteras o portafolios únicos que se ubiquen en la frontera eficiente o curva eficiente de oportunidades de tal manera que los portafolios eficientes maximicen para cada uno de los inversores su utilidad en función de la media y la desviación estándar. Este proceso se describe primero por la forma que en un plano de coordenadas σ_R, E_R (desviación estándar y rendimiento esperado) adquiere el conjunto factible de portafolios o de oportunidades riesgosas de inversión; posteriormente, la complejidad para identificar la curva de oportunidades de inversión eficientes[13] y, por último, la elección de un plan de inversión dentro de este conjunto eficiente de portafolios que sea tangente a la curva de indiferencia que representa las preferencias[14] del inversionista y al mismo tiempo maximice su utilidad.

La reconocer la complejidad de la relación entre las características de los activos individuales y de la ubicación de la curva de oportunidades, Sharpe explica la naturaleza de esta curva con un portafolio combinado de dos planes de inversión, los cuales pueden incluir uno o más activos riesgosos. Una vez planteadas las expresiones de cálculo para el rendimiento esperado y la desviación estándar, ilustra –con esta medida de variación del portafolio combinado– las posibilidades de relación entre los dos planes a partir del coeficiente de correlación entre las tasas de retorno estimadas de los dos planes de inversión y analiza el efecto de las correlaciones no perfectas entre estos planes y su incidencia en la forma cóncava o de *U* de la curva de oportunidades eficiente que, de acuerdo con Markowitz, se trata de un problema de programación cuadrática paramétrica.

Se dice que un portafolio o plan de inversiones de activos riesgosos es eficiente o dominante si no existe otro portafolio que ofrezca el mismo retorno esperado pero con menor riesgo (desviación estándar) o una cartera con el mismo riesgo y más alto retorno esperado o un portafolio que muestre a la vez un mayor retorno y menor riesgo.

Así, la visión del inversionista relaciona alguna distribución de probabilidades con los resultados de la inversión y, al evaluar una inversión en particular, actúa sobre la base del primer y segundo momentos de la variable aleatoria de los retornos de la inversión, de tal manera que el enfoque matemático de la función de utilidad adopta inicialmente la siguiente expresión con base en los valores esperados de la riqueza W y de la desviación estándar de la riqueza: $U = f(EW, \sigma W)$ Así, el enfoque de utilidad asume que el inversionista en condiciones ceteris paribus, si $\delta U/\delta EW > 0$, prefiere la riqueza esperada más alta E_W a un valor bajo, y si $\delta U/\sigma_W < 0$, se muestra adverso al riesgo al preferir una $\sigma_W$inversión con una baja desviación estándar , a una desviación más alta, dado un nivel de riqueza E_W.

Cuando se invierte parte de la riqueza W, por ejemplo Wi, se espera obtener después de un periodo de tenencia una riqueza final, W_f, que relacionada directamente con la tasa de retorno

12 Se entiende por cartera de valores, portafolio o plan de inversión a determinada combinación de valores mobiliarios adquiridos por una persona física o jurídica, y que pasan, por tanto, a formar parte de su patrimonio. En ella se incluyen cualquier tipo de activos financieros.

13 La curva de oportunidades o conjunto eficiente se puede ubicar estableciendo el conjunto de carteras con el nivel máximo de rendimiento para el rango del riesgo dado y estableciendo el conjunto de carteras con el mínimo riesgo para el rango dado de rendimientos; por tanto, es el conjunto de carteras que se encuentran en el límite noroeste del cuadrante positivo en el plano cartesiano.

14 Las preferencias se pueden describir gráficamente con curvas de indiferencia, las cuales se pueden obtener a partir de una función cuadrática.

de la inversión, R, permite expresar la utilidad de los inversionistas en términos del rendimiento de la inversión, R, mediante la siguiente expresión:

$$R = \frac{W_f - W_i}{W_i} = \frac{Wf}{W_i} - 1 \qquad (13)$$

De donde $W_f = W_i\,(1 + R)$ y, por tanto, se puede expresar que: $U = g(R_w, \sigma_W)$.

Efectos del préstamo o endeudamiento libres de riesgo

Uno de los activos determinantes en el modelo CAPM es el activo libre de riesgo[15], el cual –por definición– tiene un valor esperado igual a la tasa de interés pura y tanto su desviación estándar como su covarianza con otros activos es igual a cero. El CAPM para derivar las condiciones de equilibrio del mercado de capitales implica que todos los inversionistas pueden prestar o endeudarse a la misma tasa pura de interés generada por un activo libre de riesgo; así, se pueden considerar infinitos planes de inversiones conformados por un portafolio riesgoso más un préstamo o más un endeudamiento, libres de riesgo. En otras palabras, la riqueza inicial disponible puede estar invertida en una cantidad prestada y otra cantidad invertida en un portafolio eficiente riesgoso o, alternativamente, si al inversionista se le permite endeudarse invierte en el portafolio riesgoso no sólo su riqueza inicial disponible sino también la deuda. En ambos casos, se supone que el rendimiento esperado de este activo monetario es la tasa pura de interés. El valor esperado como la desviación estándar de los portafolios combinados con el activo libre de riesgo se obtiene a partir de las siguientes funciones lineales:

$$Rc = \alpha R_1 + (1 - \alpha)R_r \qquad (14)$$

Donde: R_c es el retorno del portafolio combinado; R_1 corresponde al retorno del activo libre de riesgo; R_r es el retorno de algún portafolio riesgoso, r, localizado en la curva de oportunidades eficientes de Markowitz; α es la proporción invertida en el activo libre de riesgo 1, y (1 -α) es la proporción invertida en el portafolio riesgoso, r.

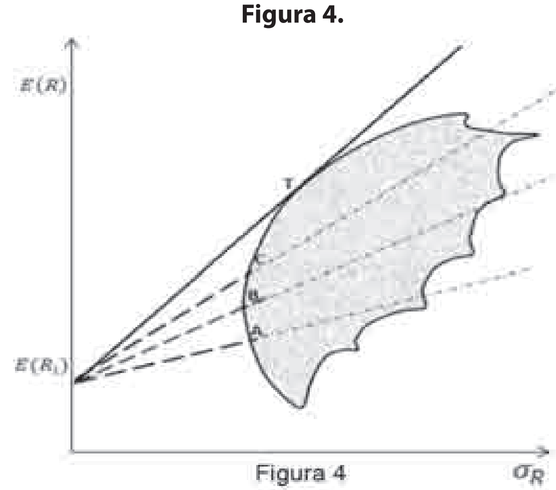
Así, se puede obtener la expectativa de la tasa de retorno, E(Rc), y la desviación estándar de las tasas de retornos de este portafolio combinado como:

$$E(Rc) = \alpha E(R1) + (1 - \alpha)E(Rr) \qquad (15)$$

$$\sigma_{Rc} = \sqrt{\alpha^2\sigma^2 R^1 + (1 - \alpha)\sigma^2 R_r + 2_{\gamma 1r}\alpha(1 - \alpha)\,\sigma_{R1}\sigma_{Rr}} \qquad (16)$$

Siendo γ el coeficiente de correlación entre el activo libre de riesgo y el portafolio riesgoso y $\sigma_2 R_1 = 0$, entonces la expresión anterior se reduce a $\sigma_{Rc} = (1 - \alpha)\sigma_{Rr}$

Figura 4.



Fuente: elaboración del autor.

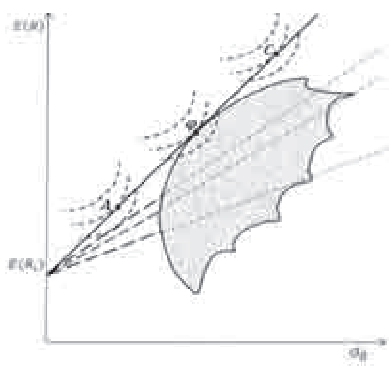
15 Este activo es un título de tesorería, emitido por los gobiernos, con un vencimiento que coincide con la duración del periodo de tenencia del inversionista.

La figura 4 permite representar portafolios combinados de activos riesgosos y el activo libre de riesgo localizados sobre las rectas e ilustrar, entre otros aspectos, que cada una de las rectas está definida por dos puntos: el intercepto con el eje de las ordenadas que representa la tasa pura de interés del activo libre de riesgo y el punto sobre la curva de oportunidades eficientes que representa el portafolio riesgoso. Sobre estas líneas rectas se localizan los puntos de coordenadas desviación estándar y retorno esperado de los portafolios combinados de activos riesgosos más préstamo o endeudamiento, como también en el punto T un portafolio conformado sólo por activos riesgosos. Gráficamente cada recta puede dividirse en dos segmentos diferenciados, así: un segmento de ellos definido entre el punto de intercepto y el punto A, B, C o T del portafolio riesgoso sobre la curva de oportunidades de Markowitz donde se ubican los planes de inversión con préstamo y el otro segmento como una extensión del punto A, B, C o T hacia el noreste partiendo del portafolio riesgoso donde se localizan las desviaciones estándar y los retornos esperados de los planes de inversión con deuda. La recta sobre la cual se localizan los mejores planes de inversión combinados es la que, partiendo del intercepto, es tangente a la curva de oportunidades de Markowitz en el punto T, con la característica que todos estos planes se conforman con el portafolio riesgoso ubicado en el punto de tangencia y denominado el portafolio o cartera T. Esta cartera es la de mercado que el CAPM asume y representa lo último en diversificación. La complejidad para determinar su composición y su valor implica que las investigaciones se lleven a cabo con una cartera sustituta tal como los principales índices accionarios. La inclusión del activo libre de riesgo en todos estos portafolios combinados con activos riesgosos cambian significativamente tanto la forma del conjunto factible como la curva de oportunidades de Markowitz, dando lugar primero a una nueva área de portafolios factibles delimitada por dos rectas con vértice a la altura del intercepto que señala la tasa de interés pura o, en otras palabras, el retorno esperado del activo libre de riesgo, y segundo, la curva de oportunidades de portafolios eficientes ahora es la recta donde se localizan los mejores portafolios o portafolios dominantes, mencionados anteriormente, de tal forma que todos los puntos sobre esta recta representen las coordenadas desviación estándar y rendimiento esperado de los nuevos portafolios combinados dominantes, los cuales incluyen el portafolio riesgoso identificado en el punto de tangencia. Los desplazamientos sobre esta recta hacia el noreste y hasta el punto de tangencia incrementan nuestra inversión en el portafolio riesgoso común para todos los inversionistas localizados en el punto de tangencia y disminuyen la proporción invertida de la riqueza inicial en el activo libre de riesgo. Los puntos localizados en la extensión de la línea recta desde el punto de tangencia en dirección noreste representan, de otra parte, las coordenadas desviación estándar y retorno esperado de los planes de inversión que han incluido el endeudamiento para incrementar la inversión de la riqueza inicial en el portafolio riesgoso tangente.

Línea del mercado de capitales y línea del mercado de títulos

Sharpe se refiere a dos de los supuestos de la doctrina clásica financiera que permiten derivar las condiciones de equilibrio del mercado de capitales. El primero asume que los inversionistas tienen como retorno esperado del activo libre de riesgo una tasa de interés común, e igual tanto para prestar como para endeudarse, mientras que el segundo implica que los inversionistas tienen concordancia (expectativas homogéneas) alrededor de los retornos esperados, la desviación estándar y los coeficientes de correlación. Así, dado el conjunto de precios de activos de capital y la conformación de portafolios combinados dominantes como se expuso anteriormente, todos los inversionistas dispondrán de las mismas alternativas, dando lugar a analizar con la ayuda de las curvas de indiferencia de los inversores tres situaciones bien diferenciadas, tal como se aprecia en la figura 5.

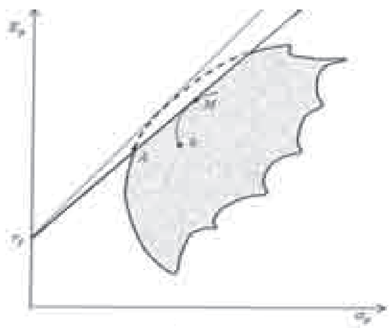
Figura 5.



Fuente: elaboración del autor.

La primera referida a planes de inversión combinados entre préstamo y el portafolio tangente φ. El inversionista con las preferencias representadas gráficamente por las curvas de indiferencia elegirán, sobre todas las posiciones, la señalada por el punto A. En la segunda situación, las curvas de indiferencia ilustran la posición φ que intenta buscar el inversionista que invierte toda su riqueza inicial en el portafolio φ, y en la tercera situación el inversionista se endeuda para tratar de alcanzar la posición C invirtiendo en un plan formado por su riqueza inicial más la deuda en el portafolio φ. En cualquiera de estas tres situaciones, los inversionistas buscarán poseer los activos riesgosos del portafolio φ, cuya presión que se ejerce sobre la demanda conlleva a un ajuste en los precios no sólo de estos valores, sino también de los activos riesgosos que conforman portafolios diferentes del portafolio φ. De una parte, los precios de los activos del portafolio φ se incrementarán y, consecuentemente, los retornos esperados o futuros disminuyen, al tiempo que decae la intención de compra por éstos, ocasionando el movimiento del punto φ hacia la derecha. Por otra parte, la escasez de demanda por los activos riesgosos que no conforman el portafolio φ, hace que los precios de estos activos disminuyan incrementado el retorno esperado y volviéndose atractivos para los inversionistas que, al demandarlos, ocasionan que los puntos que representan estas combinaciones se muevan hacia la izquierda. Esta dinámica de los precios se torna continua y se refleja en la revisión de las actitudes de los inversionistas, en nuevos o atractivas combinaciones de activos, en los cambios de la demanda y en los ajustes de los precios, de tal manera que la curva eficiente de oportunidades tiende a ser una línea recta, reconocida como línea de mercado de capitales, la cual refleja la condición de equilibrio del mercado. El mercado estable se caracteriza porque los inversionistas desearán una participación positiva en cada valor riesgoso, el precio de cada título o valor reflejará, por ejemplo, que el nivel de acciones demandadas sea igual a las acciones en circulación y el nivel de la tasa libre de riesgo mostrará que la cantidad de dinero prestado es equivalente a la cantidad de endeudamiento; en consecuencia, las proporciones de la cartera tangente corresponden con las proporciones de la cartera de mercado M. En la figura 6, todas las combinaciones o portafolios –que se encuentran en el área y por fuera de la línea de mercado de capitales– están conformados por activos riesgosos, mientras que sobre la línea recta se pueden obtener carteras combinadas de portafolios riesgosos y préstamo o endeudamiento a la tasa libre de riesgo. En la línea de mercado puede haber puntos, como A, representativos de portafolios que incluyen sólo activos riesgosos, pero alcanzables también con una combinación de portafolios riesgosos y

Figura 6.



Fuente: elaboración del autor.

endeudamiento. En teoría, la línea de mercado de capitales puede contener infinito número de combinaciones eficientes, lo cual no implica para los inversionistas sostener la misma combinación de activos y, además, tales combinaciones deben estar correlacionadas de manera positiva y perfecta. En resumen, el equilibrio del mercado de capitales expresa la relación simple entre la desviación típica como medida del riesgo de los portafolios eficientes y la rentabilidad esperada mediante la siguiente ecuación que representa la línea del mercado de capitales:

$$Ep = r_f + \left[\frac{{}^{r}M - r_f}{{}^{\sigma}M}\right]\sigma_p \qquad (17)$$

Donde el valor esperado del portafolio, Ep, es igual al rendimiento del activo sin riesgo, r_f (precio o recompensa por el tiempo de espera) más la recompensa por unidad de riesgo sostenido representada por la pendiente (precio o prima del riesgo) multiplicada por la desviación del portafolio, σ_p. La anterior relación no se cumple para las carteras deficientes o ineficaces ni para los portafolios simples, es decir, títulos o activos riesgosos aislados no diversificados que gráficamente se ubiquen por debajo de la línea de mercado de capitales. Sin embargo, la relación entre el retorno esperado y la desviación de estos retornos, es decir, el riesgo total se establece a partir de otra medida del riesgo conocida como riesgo sistemático (riesgo del mercado). La teoría ilustra esta relación al conformar, por ejemplo, un portafolio Q combinando el activo riesgoso aislado k y la cartera de mercado M, en proporciones α y (1-α), respectivamente, de tal modo que la suma de estas proporciones sea igual a 1. Portafolio que se expresa así: $Q = \alpha\kappa + (1 - \alpha)M$. Este portafolio se localizará en un punto sobre la curva que une los puntos *k* y M de la figura 6. La forma de esta curva depende del coeficiente de correlación entre los retornos el activo k y el portafolio M, denotado por PiM y ha de ser tangente a la línea de mercado de capitales. En ese punto, el cambio en la rentabilidad esperada del valor k por unidad de riesgo sostenido iguala al cambio operado en el mercado de capitales y, a partir de esta igualdad, se obtiene la relación deseada: en equilibrio todos los portafolios simples y las carteras se representan mediante una recta conocida como la línea del mercado de títulos o valores. Al igualar las dos formas de calcular la pendiente en ese punto y a partir de esta relación, se obtiene la línea del mercado de títulos o valores (CML):

$$E_k = r_f + \left[\frac{{}^{E}M - r_f}{{}^{\sigma}M^2}\right]\sigma_{kM} \qquad (18)$$

En esta igualdad se define el coeficiente beta como el cociente entre la covarianza entre el rendimiento del activo *k* y el rendimiento del mercado *M* y la varianza del mercado:

$$\beta_K = \frac{\sigma_{kM}}{\sigma_M^2}$$

que también se denomina coeficiente de volatilidad.

En resumen, el CAPM implica que la relación entre la desviación y el retorno esperado de las carteras eficientes del mercado de capitales en equilibrio, se expresa mediante una recta conocida como línea del mercado de capitales y, asimismo, implica en equilibrio una relación lineal entre la covarianza, de los rendimientos de los valores individuales y el mercado, con el rendimiento esperado del valor o, alternativamente, la relación entre la beta del valor y el rendimiento de éste.

Referencias

Alexander, G.; Sharpe, W. &. Bailey, J. (2003). *Fundamentos de inversiones. Teoría y práctica*. México: Pearson Education, 3ra Edición.

Bernoulli, D. (1954 trad.). Exposition of a new theory on the management of risk. In: *Econometrics, 22(1),* 23-36.

Burbano, A.J. (1997). El Modelo CAPM en Colombia. *Monografía N.º 47*. Bogotá: Facultad de Administración, Universidad de Los Andes.

Cruz, J.; Villareal, J. &. Rosillo, J. (2003). *Finanzas corporativas valoración, políticas de financiamiento y riesgo teoría y práctica.* 2a Edición. Bogotá: Thomson.

Dubova, I. (2004). La validación y la aplicabilidad de la teoría del portafolio en el caso colombiano. En: *Cuadernos de Administración*. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana, 18(30), 241-279.

Elton, E.J. *et ál.* (2002). *Modern portfolio theory and investment analysis.* (6th Ed.). New York, NY: John Wiley & sons.

Grinblatt, M. & Titman, S. (2003). *Mercados financieros y estrategia empresarial.* Madrid: McGraw-Hill.

Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. In: *The Review of Economics and Statistics, 1* (47), pp. 13-37.

Markowitz, H. M. (1991). Foundations of portfolio theory. In: *The Journal of Finance, 2 (46),* 469-477.

Markowitz, H.M. (1952). Portfolio Selection. In: *The Journal of Finance, 1 (7),* 77-91.

Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. In: *Econometrics, 4(34),* 768-783.

Perold, A.F. (2004). The capital asset pricing model. In: *The Journal of Economic Perspectives, 3 (18),* 3-24.

Sharpe, W.F. (1974). *Teoría de cartera y del mercado de capitales*. Bilbao: Ediciones Deusto.

Sharpe, W.F. (1963). Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. In: *The Journal of Finance.* 3(19), 425-442.

Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. In: *The Review of Economic Studies*, 2 (25), 65-86.

Varian, H.R. (2004). *Microeconomía intermedia: Un enfoque actual.* Barcelona: Antoni Bosch, Séptima Edición.