Propuestas metodológicas para el análisis de Sistemas Ecológicos

Modelos de simulación para el estudio del crecimiento poblacional exponencial

Cesar A. Bejarano M.*

Resumen

En respuesta a la búsqueda de estrategias didácticas para la enseñanza de las asignaturas Sistemas Ecológicos y Ecología General en la Universidad de La Salle, se innovó la aplicación de modelos del Crecimiento Poblacional empleando juegos denominados *frijolero*, que simulan las condiciones de campo. Las tablas de datos por cada modelo de simulación se obtuvieron en clase por los estudiantes de la asignatura, siguiendo las metodologías respectivas propuestas por Franco *et al.* (1995) y modificadas por el autor. Durante los ejercicios en clase, se simularon tres formas distintas de Crecimiento Exponencial Poblacional, denominadas respectivamente: modelos (juegos) de Crecimiento Explosivo, de la Permanencia y de la Extinción. Se propuso además el desarrollo del Análisis de Regresión para las variables X (tiempo) y Y (número de individuos de la población), a partir de las tablas de datos. En la discusión y conclusiones se analizó la bondad de estas propuestas metodológicas y su importancia en los procesos de enseñanza - aprendizaje de estos temas de la Ecología General.

Palabras Clave: modelo, población (biótica), sistemas ecológicos, ecuaciones de crecimiento exponencial, analisis de regresión

Proposals for the analysis in the ecological systems: simulation models to study exponential population growth

Abstract

As a didactic proposal for teaching the subject Ecological Systems in The University La Salle, the application of population growth models known as "plays with beans" was improved. The variable tables for each model were received in class by students according to the methodologies proposed by Franco et al. (1995) and modified by the author of this essay. During the development of exercises in class, three different forms of exponential growth were simulated: explosive, steady state and extinction growth models. Moreover, the linear regressions of the number of organisms in a population (Y) over time (X) were proposed. In Discussions and Conclusions, the validity of this proposal is analyzed as well as its importance in the teaching - learning process.

Key Words: model, biotic population, ecological systems, exponential growth equations, linear regression

* Biólogo Ms Y M. Ed. Pregrado Química y Biología, Universidad Libre. Postgrado en Genética de Poblaciones, Universidad de Los Andes (Bogotá). Magíster en Biología, Universidad Javeriana (Bogotá). Magíster en Tecnología Educativa, Universidad de Salamanca (España). Especialización en Sistemas de Información Geográfica, U. Distrital - IGAC (Bogotá). Profesor de Ecología de la Facultad de Ingeniería Ambiental, Universidad de La Salle (Bogotá). Profesor de Postgrado Especialización en Gerencia Ambiental, Facultad de Ingeniería de la Universidad Libre (Bogotá). Profesor (P) de la Universidad Distrital FJC (Bogotá), Departamento de Biología de la Facultad de Ciencias y Educación. Coautor de Libros de Ciencias Naturales, Editorial Norma (Bogotá). Correo electrónico: cbejaranom@hotmail.com, cbejarano@jupiter.lasalle.edu.co
Fecha de recepción: 4 de mayo de 2005.
Fecha de aprobación: 10 de mayo de 2005.

Introducción

Los sistemas ecológicos contienen elementos vivos de interacción e interdependencia regulares entre sí y el medio ambiente, que forman un todo unificado y comprenden básicamente los niveles de organización correspondientes a poblaciones, comunidades, ecosistemas, biomas y biosfera. El énfasis de este artículo se centró en uno de los aspectos más estudiados de la dinámica poblacional que es el crecimiento de las poblaciones naturales, caracterizado por el aumento o disminución del número de sus organismos en el tiempo, en obediencia a múltiples factores.

Generalmente, la *población* se define como el conjunto de organismos de la misma especie (que pueden intercambiar información genética entre sí y proyectarla al futuro mediante la reproducción), que habita un área determinada en un tiempo dado. Posee además una serie de propiedades estadísticas como densidad, natalidad, mortalidad, edad, distribución, potencial biótico, dispersión y forma de desarrollo. De igual modo, las poblaciones poseen características genéticas que al interactuar con la información ambiental (relaciones organismo-medio ambiente) se traducen en fenotipos, adaptación y capacidad reproductiva, entre otras (Bejarano, 1993). Desde este punto de vista, las poblaciones bióticas se manifiestan como unidades dinámicas caracterizadas por cambios constantes en sus propiedades las que, en definitiva, influyen en sus cambios de tamaño (poblacional). El equilibrio entre las tasas de incremento (n) y las de decremento (m) en el tiempo (t) determinan el *tamaño de una población: n' (natalidad + inmigración) = m' (mortalidad + emigración)*. En un medio ilimitado en el que el espacio, el alimento y otros organismos no son factores limitativos, la *velocidad de crecimiento poblacional per capita* (o índice de crecimiento poblacional por individuo por el tiempo) es función de las tasas de incremento per capita: **dN / Ndt = (n' - m')**, ecuación ésta que representa la velocidad de cambio en el número de organismos en el tiempo y por individuo en un instante particular. Asumiendo la mayor importancia de los nacimientos (n) y de la mortalidad (m) respecto de la migración y si (n - m) = r, la anterior ecuación se transforma en: **d N / N dt = (n - m) = r.**

El símbolo **r**, que es el exponente en la ecuación diferencial para el crecimiento de la población en un medio *ilimitado* en determinadas condiciones físicas, se define como la tasa intrínseca del crecimiento o potencial biótico: **d N / N dt = r.**
Integrando entre límites: $\int_{No}^{N} dN = \int_{o}^{t} rdt$; esto es
$\ln N\,]_{No}^{N} = rt\,]_{0}^{t}$
Con límites: $\ln N_{t+1} - \ln N_{o} = rt$
Despejando: $\mathbf{\ln N_{t+1} = \ln N_{o} + rt}$. Graficando esta ecuación lineal adquiere la forma general de una recta de la forma **Y = a + bX** (donde b = r).

La fórmula integrada exponencial obtenida por manipulación diferencial corresponde al antilogaritmo $\mathbf{N_{t+1} = N_{o}e^{rt}}$, donde r *actúa* como el coeficiente instantáneo de crecimiento de la población. Graficando esta ecuación se encuentra una relación exponencial cuya curva tiene forma de J.

El resultado final de la integración del modelo exponencial dice que a partir de una población inicial N_{o} después de t unidades de tiempo, el tamaño de la población estará dado por dicha población inicial multiplicada por la exponencial de la tasa intrínseca de crecimiento poblacional (r) en el tiempo transcurrido. Lo cual significa que conocido N_{o} podemos evaluar en cualquier t el valor de N_{t+1} (población final), conociendo r. El crecimiento exponencial se comporta como un interés compuesto de nacimientos en la población y es la base conceptual del llamado *crecimiento y selección r.*

La tasa neta a la cual las poblaciones cambian también pueden estimarse a partir de $\mathbf{R_{o}}$, definido como el número de veces que aumenta el tamaño de la población después de un tiempo generacional T: $N_T = N_0R_0$, donde N_T es el número de organismos en tiempo T; N_0 es el número de individuos antes del tiempo generaciomal T; y R_0 es la tasa neta de incremento.

Es interesante observar que las relaciones entre R_0 y r están dadas por la ecuación: $R_0 = e^{rt}$; despejando, $r = \ln R_0 / T$. Estas son, pues, las consideraciones matemático-conceptuales básicas para adentrarse en el estudio de estas dinámicas poblacionales referentes al crecimiento exponencial. (Odum, 1972; Hutchinson, 1981; Franco *et al.*, 1995; Smith & Smith, 1998).

Complementariamente, para Erazo (1997), la didáctica y aprendizaje de las ciencias en general y de las experimentales en particular, en todos los niveles académicos, requieren de la construcción de un espacio teórico complejo, desde el cual se propongan alternativas y modelos metodológicos innovadores, para lograr la comprensión y el análisis de la compleja lógica interna de la ciencia, de sus discursos y de sus constructos teórico-demostrativos. Desde esta óptica, este artículo propone innovar la aplicación de modelos de simulación del crecimiento poblacional exponencial empleando juegos denominados *frijolero*, de fácil realización por los estudiantes. Es una propuesta metodológica a emplearse como estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de la asignatura Ecología General, con especial referencia al desarrollo conceptual, matemático y bioestadístico del conocimiento de la dinámica poblacional.

Materiales y métodos

Para la realización de los ejercicios, se empleó un tablero de ajedrez con cuadrículas de 5 x 5 cm. Los organismos de la población se remplazaron con fríjoles pequeños que se arrojan sobre el tablero desde un vaso grande de plástico. El perímetro del tablero se rodeó con 4 carpetas de cartón, aseguradas unas a otras con cinta pegante, para evitar la salida de los fríjoles fuera del tablero. Durante el desarrollo del ejercicio, se simularon tres formas distintas de *crecimiento* poblacional, cuya metodología se describe a continuación (Franco *et al.*, 1995).

Tabla 1. Juego de simulación del Crecimiento Poblacional Exponencial, modelo de crecimiento explosivo, donde C=3 (individuo que se reproduce). Datos observados (experimentales). Cálculos de R_0 y r.

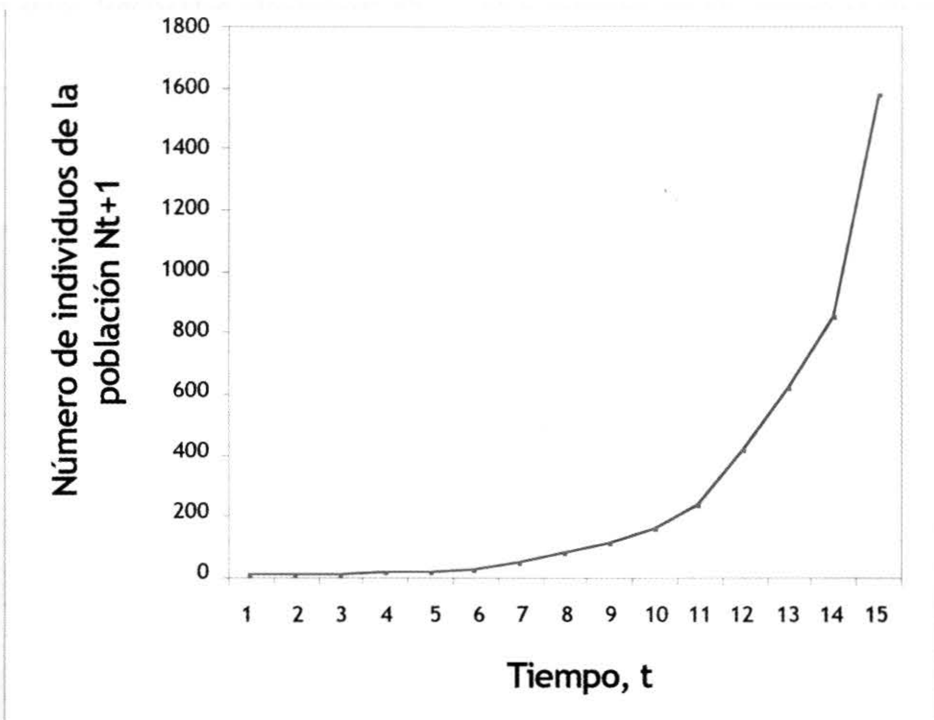
t	N_0 inicial	Número de muertos	Número. de sobrevivientes (S)	N_{t+1}=S*C	$R_0=\frac{N_{t+1}}{N_0}$	r= ln R_0
1	10	8	2	6	0.6	-0.510
2	6	3	3	9	1.5	0.405
3	9	5	4	12	1.333	0.287
4	12	7	5	15	1.25	0.223
5	15	6	9	27	1.8	0.587
6	27	12	15	45	1.666	0.510
7	45	19	26	78	1.733	0.549
8	78	42	36	108	1.384	0.324
9	108	55	53	159	1.472	0.386
10	159	81	78	234	1.471	0.385
11	234	97	137	411	1.756	0.563
12	411	206	205	615	1.496	0.402
13	615	333	282	846	1.375	0.318
14	846	322	524	1572	1.858	0.619
15	1572	837	735	2205	1.402	0.337

Modelo del Crecimiento Explosivo. Consistente en arrojar sobre el centro del tablero 10 semillas de fríjol contenidos en el vaso, a una altura de 25 cm. Se consideró 10 como el tamaño inicial de la población (N_o inicial = 10). Las reglas fueron: organismo caído en cuadro negro, muere. Cada organismo que caiga en cuadro blanco, se reproduce, esto es, se multiplica por un valor C = 3.

Se diseñó una tabla de datos con siete columnas bautizadas teniendo como modelo la Tabla 1, en la que figuran, por ejemplo, para t_1 : N_o = 10; número de muertos = 8 (fríjoles caídos en cuadros negros); sobrevivientes S = 2 (fríjoles caídos en cuadros blancos); N_{t+1} = SC = 2 * 3 = 6 (organismos que pasan a la siguiente generación t_2).

Las ecuaciones para calcular la tasa neta de incremento poblacional (R_o) y la tasa intrínseca de crecimiento o potencial biótico de la población (r), se especificaron en las columnas 6 y 7, respectivamente. Con los valores de la columna N_{t+1} = SC vs tiempo (t) se dibujó la curva de crecimiento en escala aritmética (ver la Figura 1 como modelo). La Tabla 1 contiene, pues, los *datos observados* u obtenidos experimentalmente (en este caso, a través del desarrollo de este modelo de frijolero).

Figura 1. Gráfica en J y escala aritmética N_{t+1} vs t, según datos observados de la Tabla 1. La gráfica también coincide con la ecuación N_{t+1} = No e^{rt} (relación exponencial). La curva indica que la tasa instantánea de nacimientos (n) es mayor que la tasa de mortalidad (m): n > m. Valores de r positivos.



A continuación, se diseñó una Tabla 2, en la que se consignaron los *datos esperados* del crecimiento poblacional explosivo, aplicando las ecuaciones poblacionales a los valores de la Tabla 1. Es decir, fueron datos calculados mediante ecuaciones poblacionales que involucran los valores de r y de R_o y su efecto en el incremento/decremento poblacional exponencial. Sus 4 columnas se bautizaron como se referencia en (Tabla 2 como modelo de aplicación). Por ejemplo, para t_1 y N_o = 10, la ecuación a escala logarítmica $\ln N_{t+1} = \ln N_o + rt$ donde t = 1, se resolvió reemplazando valores, así: $\ln N_{t+1} = \ln 10 + (-0.510)t = 1.792$, cuyo antilogaritmo ($e^{1.792}$) es 6.004 organismos que pasan a la generación t_2. En este caso, t = 1 porque las diferencias entre t_1 y t_2, t_2 y t_3 ... es 1. La Tabla 2 también debe llevar los cálculos correspondientes a la relación exponencial y a la escala aritmética, mediante la ecuación $N_{t+1} = N_o e^{rt}$. El número de organismos de la población que pasan a la siguiente generación igualmente se calculó mediante la ecuación $N_{t+1} = R_o N_o$.

Tabla 2. Datos esperados del Crecimiento Poblacional Explosivo, calculados a partir de las ecuaciones poblacionales (Según Tabla 1).

T	Escala Logarítmica	*ESCALA ARITMÉTICA*	
	$\ln N_{t+1} = \ln N_o + rt$ t=1	$N_{t+1} = N_o e^{rt}$ t=1	$N_t = R_o N_o$
1	Ln Nt+1= Ln10 + (-0.510) t = **1.792** Antilog = **6.004**	Nt+1 = 10 $e^{-0.510t}$ = **6.004**	6
2	Ln Nt+1= Ln 6 + (0.405) t = **2.196** (= 8.995)	Nt+1 = 6 $e^{0.405t}$ = **8.995**	9
3	Ln Nt+1= Ln9 + (0.287) t = **2.484** (= 11.991)	Nt+1 = 9 $e^{0.287t}$ = **11.991**	11.997
4	Ln Nt+1= Ln12 + (0.223) t = **2.707** (= 14.997)	Nt+1 = 12 $e^{0.223t}$ = **14.997**	15
5	Ln Nt+1= Ln15 + (0.587) t = **3.295** (= 26.978)	Nt+1 = 15 $e^{0.587t}$ = **26.978**	27
6	Ln Nt+1= Ln27 + (0.510) t = **3.805** (= 44.962)	Nt+1 = 27 $e^{0.5106t}$ = **44.962**	44.982
7	Ln Nt+1= Ln45 + (0.549) t = **4.355** (= 77.918)	Nt+1 = 45 $e^{0.549t}$ = **77.918**	77.985
8	Ln Nt+1= Ln78 + (0.324) t = **4.680** (= 107.846)	Nt+1 = 78 $e^{0.324t}$ = **107.846**	107.95
9	Ln Nt+1= Ln108+ (0.386) t = **5.068** (= 158.877)	Nt+1 = 108 $e^{0.386t}$ = **158.877**	158.97
10	Ln Nt+1= Ln159+ (0.385) t = **5.453** (= 233.668)	Nt+1 = 159 $e^{0.385t}$ = **233.668**	233.88
11	Ln Nt+1= Ln234+ (0.563) t = **6.018** (= 410.088)	Nt+1 = 234 $e^{0.563t}$ = **410.088**	410.90
12	Ln Nt+1= Ln411+ (0.402) t = **6.420** (= 614.367)	Nt+1 = 411 $e^{0.402t}$ = **614.367**	614.856
13	Ln Nt+1= Ln615+ (0.318) t = **6.739** (= 854.241)	Nt+1 = 615 $e^{0.318t}$ = **845.241**	846
14	Ln Nt+1= Ln846+ (0.619) t = **7.359** (= 1571.081)	Nt+1 = 846 $e^{0.619t}$ = **1571.081**	1571.868

Con los valores del ln N_{t+1} vs t se graficó de la Figura 2, correspondiente al diagrama de dispersión X - Y, así como a la relación lineal representada por una recta de la forma Y = a + bX. (Tomar la Figura 2 , como ejemplo de aplicación).

Modelo de la Permanencia. Consistió en lanzar sobre el centro del tablero 50 fríjoles contenidos en el vaso a una distancia de 25 cm (N_0 = 50 individuos). Las reglas del juego, fueron: organismo que caiga en cuadro negro, muere; organismo caído en cuadro blanco, sobrevive y se reproduce con una C = 2.

Modelo de la Extinción (Decremento Exponencial). Inició con 100 fríjoles (N_0 = 100 organismos). Se aplicaron las mismas reglas pero C = 1. Las tablas de datos, figuras y cálculos para estos dos últimos modelos se realizaron según las metodologías explicadas anteriormente.

Análisis de regresión. El patrón de variación de Y respecto de X se determinó por la ecuación Y = a + bX, donde **b** es la pendiente (correspondiente al valor de **r**) y **a** es la ordenada al origen en Y. Se deben estimar los valores de **b** y **a** para establecer una relación funcional entre X-Y (*ajuste a la* recta). El cálculo de **b** y **a** por mínimos cuadrados [$(\Sigma Y$ observado - Y esperado$)^2$ = mínimos], se hizo según:

$$b = \frac{\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y}{\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2 / n}; \quad a = \Sigma Y / n - b \Sigma X / n$$

Donde n = número de relaciones X - Y.

Reemplazando los valores obtenidos de b y a como constantes, se obtuvo una ecuación lineal empírica que sirvió como medio para predecir el valor que tomaría Y esperado (Y_E) al adoptar un valor cualquiera de X. Para el cálculo de los valores de ΣX, ΣY, ΣX^2, Σ XY, se tomó como modelo la Tabla 3 del Anexo. Los datos obtenidos por el análisis de regresión se consignaron en Tablas como las números 3, 4 y 5.

Figura 2. Gráfica en escala logarítmica de la ecuación lineal Ln N_{t+1} = Ln N_0 + rt. Diagrama de dispersión Y-X, según datos de la Tabla 2. Relación lineal representada por una recta de la forma Y= a +bx. Además, $n > m$. Valores de a positivos.

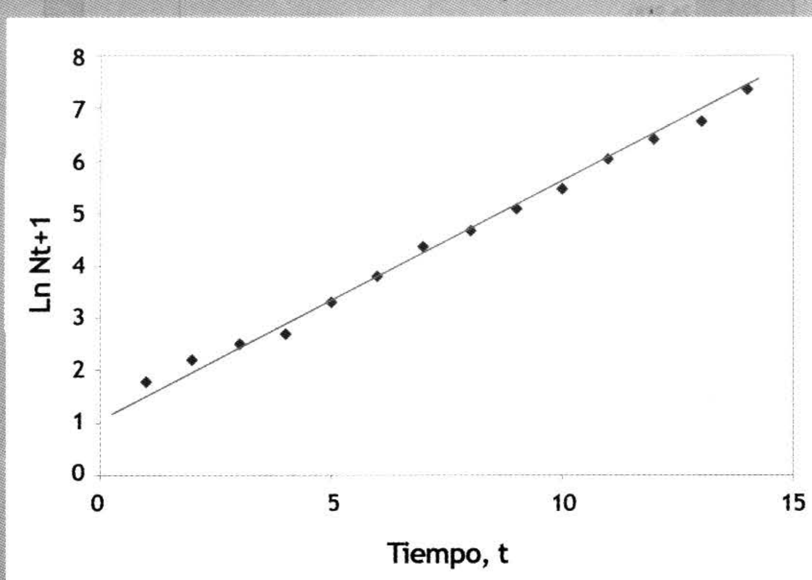


Tabla 3. Análisis de regresión. Relaciones X-Y y cálculos para el ajuste de mínimos cuadrados. Transformación logarítmica de los datos de la Tabla 3.

t	Ln X	Ln Y	Ln X^2	(Ln X) (Ln Y)
1	0	1.792	0	0
2	0.693	2.196	0.480	1.521
3	1.098	2.484	1.205	2.727
4	1.386	2.707	1.920	3.751
5	1.609	3.295	2.588	5.301
6	1.791	3.805	3.207	6.814
7	1.945	4.355	3.783	8.470
8	2.079	4.680	4.322	9.729
9	2.197	5.068	4.826	11.134
10	2.302	5.453	5.299	12.552
11	2.397	6.018	5.745	14.425
12	2.484	6.420	6.170	15.947
13	2.564	6.739	6.570	17.278
14	2.639	7.359	6.964	19.240
	$\Sigma X = 25.184$	$\Sigma Y = 62.371$	$\Sigma X^2 = 53.079$	$\Sigma XY = 129.069$

Resultados y discusión

Realizados los ejercicios de aplicación de los modelos por parte de los estudiantes en la sesión de clase de la asignatura Sistemas Ecológicos y Ecología General, se obtuvieron las tablas de datos y las figuras correspondientes a las curvas de crecimiento poblacional. El autor hizo los desarrollos matemáticos del análisis de regresión según las tablas de datos obtenidos, como propuesta metodológica complementaria a estos ejercicios.

Modelo del Crecimiento Explosivo con $C = 3$ y $N_0 = 10$

Se hicieron 15 lanzamientos de fríjoles sobre el tablero de ajedrez, obteniéndose las variables consignadas en la Tabla 1, Modelo de crecimiento poblacional explosivo, datos observados experimentales. Con base en la población inicial (N_0) y en la final (N_{t+1}) para cada tiempo generacional (t), se calcularon las estimaciones de los valores de la tasa neta de incremento poblacional (R_0) y de la tasa intrínseca de crecimiento o potencial biótico de la población (r). En las poblaciones naturales, r no es un valor constante como se aprecia en la Tabla 1, puesto que la natalidad (n) y la mortalidad (m) son parámetros poblacionales que cambian en función de la densidad y de los factores ambientales. Los r positivos ($r > 0$) son términos que *adicionan* valores positivos a las ecuaciones de crecimiento poblacional (como en $\ln N_{t+1} = \ln N_0 + rt$ y en $N_{t+1} = N_0 e^{rt}$ de la Tabla 2) e implican un aumento en el número de organismos. Por el contrario, los r negativos ($r < 0$) *adicionan* valores negativos e implican un decremento en el número de organismos de la población. La ecuación $R_0 = e^{rt}$ muestra las correspondencias entre estas dos R_s. Despejando $r = \ln R_0 / t$.

Las relaciones de r con n (natalidad) y con m (mortalidad) se hacen muy evidentes en las Figuras 1, 2, 3, 4 y 5, donde fácilmente se aprecia que:

a) n > → m r → > 0 la población crece a infinito

b) n = m → r = 0 → la población se mantiene constante

c) n < m → r < 0 la población se extingue

Las Figuras 1 y 2, basadas en la Tabla 1, ilustran las curvas del crecimiento exponencial explosivo en sus escalas aritmética y logarítmica, respectivamente, así como la relación lineal representada por una recta de la forma Y = a + bX, donde b = r.

El análisis de regresión. La relación lineal entre X-Y que muestra la Figura 2 permite encontrar el valor de b o pendiente de la recta (= r) a partir de: (a) los datos experimentales (tal como se evidenció en las Tabla 1); (b) mediante la ecuación $r = \ln N_{t+1} - \ln N_o / t_2 - t_1$; (c) por la tangente del ángulo Θ, que se forma entre la intersección de la recta al eje Y y la línea horizontal al eje X desde esta intersección (tang Θ = b). O bien, (d) utilizando el método de la regresión lineal. Como en la Figura 2 se aprecia una tendencia definida en los valores de las variables, es aconsejable una regresión. (De lo contrario, no hacerlo o tomar más datos).

La **regresión** es un modelo matemático que permite determinar el grado en el que el patrón de variación de una variable determina la variación de otra. Las variables en consideración, son: las *independientes* (X), que son medidas sin error, i.e., tiempo, áreas; y las variables *dependientes* (Y) que toman sus valores de acuerdo con el valor asociado de X.

En los datos de la Tabla 2, la variable independiente X es el tiempo (t) desde que se inició el crecimiento; la variable dependiente Y o número de organismos de la población en el tiempo t, corresponde a N_{t+1} (también puede ser N_o), aquí transformado como $\ln N_{t+1}$, donde n es el número de pares X-Y.

Tabla 4. Análisis de regresión. Valores de Y esperado calculados según los datos de la Tabla 2.

t	Ln X (tiempo)	Ln Y_O observado	Ln Y_E Esperado = 0.553 + 2.169X
1	0	1.792	0.553
2	0.693	2.196	1.886
3	1.098	2.484	2.988
4	1.386	2.707	3.772
5	1.609	3.295	4.379
6	1.791	3.805	4.875
7	1.945	4.355	5.294
8	2.079	4.680	5.659
9	2.197	5.068	5.980
10	2.302	5.453	6.266
11	2.397	6.018	6.524
12	2.484	6.420	6.761
13	2.564	6.739	6.979
14	2.639	7.359	7.183

En el análisis de regresión la relación básica es *lineal*. Como el diagrama de dispersión de la Figura 2 mostró una tendencia exponencial, la ecuación Y = a + bX debió transformarse de manera que adoptara la forma lineal, así: **lnY = ln a + b lnX**. Igualmente, los datos originales (*crudos*) de la Tabla 1 referentes a t y a N_{t+1} debieron transformarse logarítmicamente según se aprecia en la Tabla 3, para señalar las relaciones X-Y y lograr los cálculos para el ajuste de los mínimos cuadrados, según: lnX, lnY, lnX^2, (lnX)(lnY), con sus respectivas sumatorias ΣX, ΣY, $ΣX^2$, Σ XY.
Las sumatorias obtenidas en la Tabla 3, son:
ΣX= 25.184; ΣY= 62.371; $ΣX^2$= 53.079; Σ XY= 129.069.

A partir de estos valores, se calcularon la pendiente **b** = 2.169 y la ordenada al origen Y, **a** = 0.553, de tal manera que la relación lineal es **Y = 0.553 + 2.169X**, ecuación ésta que corresponde al número de organismos de la población que cabría esperar en el tiempo t.

Sea, por ejemplo, t = 5 (el ln 5 = 1.609) entonces Y esperado = 0.553 + 2.169*1.609 = 4.379 organismos de la población que caben esperar en la generación t_5. Aquí la pendiente constante **b** es el equivalente a la constante **r** para las 14 generaciones poblacionales de este ejercicio. De esta manera se calcularon las variables Y esperado (transformadas como lnY_E) consignadas en la Tabla 4. Los antilogaritmos de X, Y_0 y Y_E recuperan sus respectivos valores aritméticos.

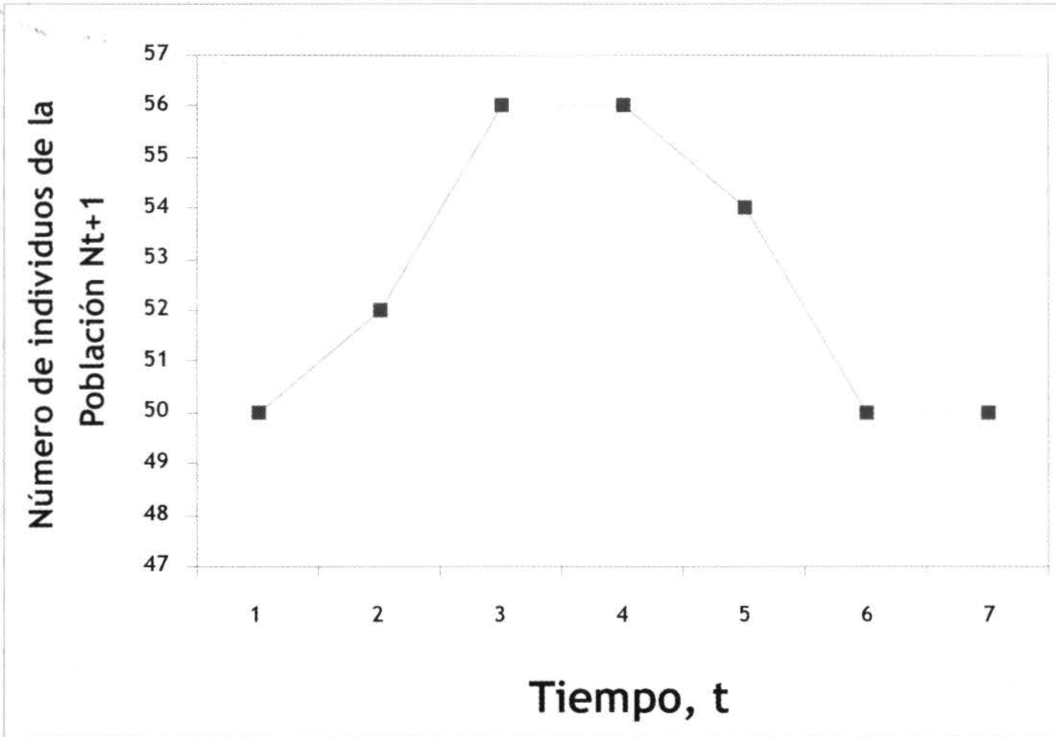
Modelo de Permanencia con C = 2 y N_0 = 50

Se realizaron 7 lanzamientos de fríjoles sobre el tablero de ajedrez, lográndose los datos consignados en la Tabla 5. Se determinaron las variables N_o, N_{t+1}, R_o y r, diseñándose la Figura 3 a partir de N_{t+1} vs t.

Tabla 5. Simulación del juego de Crecimiento Poblacional Exponencial, modelo de la de Permanencia, donde C = 2 y N_0 inicial = 50.

t	No inicial	Número de muertos	Número de sobreviviente S	Nt+1= S*C	Ro= Nt+1 / No	N t = Ro No	r= Ln Ro
1	50	24	26	52	1.04	52	0.03
2	52	24	28	56	1.07	55.6	0.07
3	56	28	28	56	1	56.0	0
4	56	29	27	54	0.9	50.4	-0.03
5	54	29	25	50	0.92	49.6	-0.07
6	50	25	25	50	1	50	0
7	50	31	19	38	0.76	38	-0.2

FIGURA 3. GRÁFICA EN ESCALA ARITMÉTICA DEL CRECIMIENTO POBLACIONAL EXPONENCIAL, JUEGO DE LA PERMANENCIA (SEGÚN DATOS DE LA TABLA 5). EN EL INTERVALO T 1 A 3, N> M PARA R POSITIVO; EN T 4 A 6, N<M PARA R NEGATIVO. EN EL INTERVALO T 6 A 7, N = M Y R = 0.



Como su nombre lo indica, este juego sugirió que al disminuirse la tasa reproductiva o nacimientos, se logró un equilibrio con la tasa de mortalidad y la población *permaneció* dentro de ciertos números poblacionales, cuya media geométrica correspondería a la asíntota K o capacidad de porte del sistema ecológico, es decir, al número máximo de individuos de la población que el sistema podría sustentar, en términos de *crecimiento logístico* (objeto de otro artículo). La población entraría, pues, a un equilibrio dinámico de flujo (conocido como *steady state*). Desde el punto de vista de la dinámica poblacional es interesante destacar que, en el intervalo t 1 a 3, n> m para r > 0; en t 3 a 4 al igual que en t 6 a 7, n = m y r = 0; mientras que en el intervalo t 4 a 6, n < m para r < 0.

Modelo de la extinción o Decremento Exponencial donde C = 1 y N_o = 100

Se practicaron 5 lanzamientos de fríjoles sobre el tablero de ajedrez, lográndose la Tabla 6 para los diseños de las Figuras 4 y 5. Es impresionante constatar que en solo 5 generaciones (y, en ocasiones, menos) la población de un ecosistema dado puede extinguirse como consecuencia de factores intrínsecos y extrínsecos que afecten su reproducción. En el modelo de la extinción, la dinámica poblacional estuvo dada por n < m para r < 0. La flecha indica el punto de la definitiva muerte poblacional.

FIGURA 4. GRÁFICA A ESCALA ARITMÉTICA DEL DECRECIMIENTO POBLACIONAL EXPONENCIAL. MODELO DE LA EXTINCIÓN (SEGÚN TABLA 7), DONDE N < M. VALORES DE A NEGATIVOS.

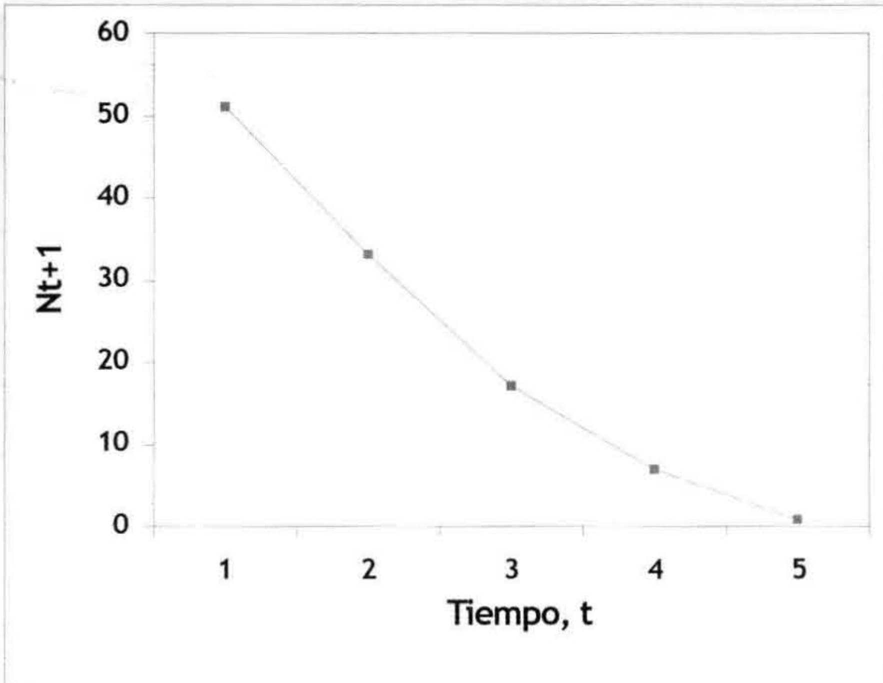


FIGURA 5. GRÁFICA A ESCALA LOGARÍTMICA DEL DECRECIMIENTO POBLACIONAL EXPONENCIAL. MODELO DE LA EXTINCIÓN (SEGÚN TABLA 6). ADEMÁS, N < M. VALORES DE A NEGATIVOS. LA FLECHA INDICA EL PUNTO DE EXTINCIÓN.

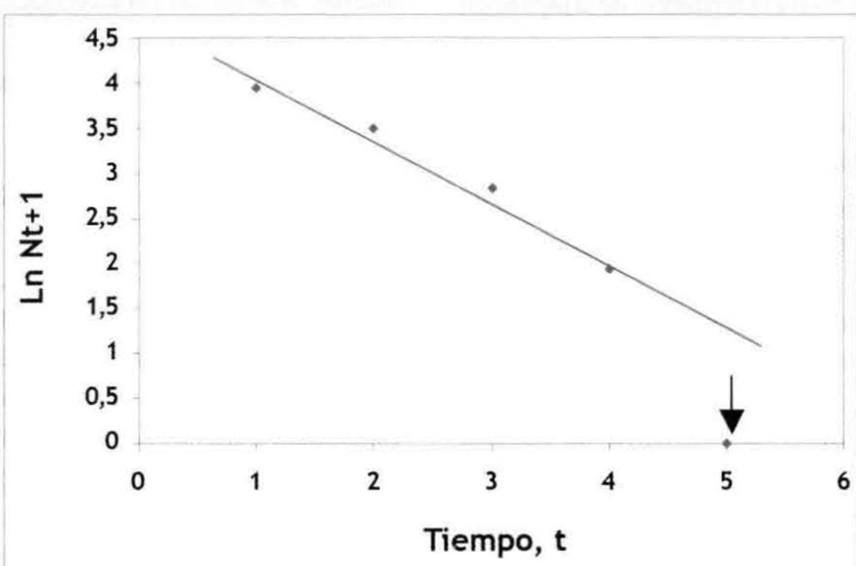


Tabla 6. Simulación del juego de Crecimiento Poblacional Exponencial, donde C = 1. Modelo de la Extinción ó Decremento Exponencial.

T	N_o	$N_{t+1} = S^*C$	$R_o = \frac{N_{t+1}}{N_o}$	$r = \ln R_o$	$\ln N_{t+1} = \ln N_o + rt$	$N_{t+1} = N_o e^{rt}$	$N_{t+1} = R_o N_o$
1	100	51	0.51	-0.673	3.932t = 51.017	51.017	51
2	51	33	0.647	-0.435	3.496t	33.010	33
3	33	17	0.515	-0.663	2.833t	17.000	17
4	17	7	0.411	-0.889	1.944t	6.988	7
5	7	1	0.143	-1.945	0.0009t	1.000	1

Conclusiones

El modelo de crecimiento explosivo poblacional con C = 3 y N_o = 10 mostró una clara tendencia exponencial evidenciada en la gráfica en J y en la gráfica a escala logarítmica, curvas que coinciden con las ecuaciones $N_{t+1} = N_o e^{rt}$ y $\ln N_{t+1} = \ln N_o + rt$. Se demostró la relación lineal representada por una recta de la forma Y = a + bX. Además, n > m, r > 0 y la tendencia de la población a crecer a infinito (expresión máxima del potencial biótico). Mediante el análisis de regresión aplicado a las variables obtenidas en el desarrollo del anterior ejercicio, se estableció la relación lineal Y = 0.553 + 2.169X, que corresponde al número de individuos de la población que cabe esperar en el tiempo t.

El modelo de crecimiento de permanencia con C = 2 y N_o = 50, demostró la condición n = m, r = 0 correspondiente a poblaciones que permanecen estables en el tiempo. Por su parte, el modelo de la extinción con C = 1 y N_o = 100, demostró el decrecimiento exponencial donde se evidencia el punto de extinción debido a n<m y r<0.

Desde el punto de vista de la Didáctica de la Ecología y los Sistemas Ecológicos, la aplicación de modelos metodológicos de laboratorio como los propuestos en este artículo, permite abordar conceptual, matemática y estadísticamente temas de estudio como el crecimiento poblacional exponencial, en sus fases explosiva, de permanencia y de extinción. Permite además analizar las características y tendencias de la dinámica poblacional e inferir las predicciones que caben esperarse mediante la aplicación de estos modelos.

Los modelos son representaciones físicas o abstractas de la estructura y la función de sistemas reales, con propiedades como el realismo, la precisión y la generalidad. Los modelos propuestos son *formales*, porque son una abstracción de la realidad; *matemático-gráficos*, porque brindan soportes matemáticos, estadísticos e interpretativos; *descriptivos* y aplicados a otras situaciones de estudio. Son *formativos*, porque facilitan el acceso a las estructuras conceptuales y a las formas de producción del conocimiento.

Bibliografía

Bejarano, C. "Medio Ambiente - Organismo desde las Ciencias Naturales y Humanas". *Opciones Pedagógicas* 9. (1993): 63-69.

Erazo, M. "Alternativas epistemológicas y didácticas en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias". *Revista Diógenes* 4. 2. (1997): 245-259.

Franco, J., *et al. Manual de ecología.* México: Trillas, 1995.

Hutchinson, G. E. *Introducción a la ecología de poblaciones*. España: Blume, 1981.

Odum, E. *Ecología*. México: Nueva Editorial Interamericana, 1972.

Smith, R. & Smith, T. *Elements of Ecology.* Estados Unidos: Addison Wesley Longman, 1998.