

Propuestas metodológicas para el análisis de Sistemas Ecológicos. Modelo de simulación para el estudio del crecimiento poblacional logístico

César A. Bejarano M.*

Resumen

En este artículo se presenta la aplicación del modelo de simulación del Crecimiento Poblacional Logístico, como estrategia didáctica para la construcción del conocimiento en los procesos de enseñanza-aprendizaje de los contenidos temáticos de las asignaturas Ecología General y Sistemas Ecológicos en la Facultad de Ingeniería Ambiental y Sanitaria de la Universidad de La Salle. Las tablas de datos del modelo de simulación fueron obtenidas en clase por los estudiantes de la asignatura, siguiendo las metodologías respectivas propuestas por Franco *et al.* (1995) y modificadas por el autor. Durante los ejercicios en clase, se simuló el modelo Logístico, a través de juegos denominados *frijolero*. Se compararon los valores observados o empíricos y los esperados matemáticamente mediante la prueba del χ^2 para establecer la no significatividad de las diferencias entre estos valores. En la discusión y conclusiones se evidencia la bondad de estas propuestas metodológicas y su importancia en la formación del Ingeniero Ambiental y Sanitario de la Universidad de La Salle, Bogotá. De ahí surgió la idea de socializar los resultados de estos modelos de simulación con sus desarrollos matemáticos, de aplicación ya sea en la Facultad como en otras facultades de la Universidad.

Palabras clave: modelo, población (biótica), sistemas ecológicos, ecuaciones de crecimiento logístico, Chi cuadrado.

METHODOLOGICAL PROPOSALS FOR ECOLOGICAL SYSTEMS ANALYSIS: SIMULATION MODEL TO STUDY LOGISTIC POPULATION GROWTH

ABSTRACT

As a didactic teaching proposal for contents of the subject Ecological Systems in the Faculty of Environmental and Sanitary Engineering at La Salle University, the application of the logistic growth of population model is presented. The variable ranges of the model were obtained by students in class, according to the methodologies proposed by Franco *et al.* (1995: 61) and reviewed by the author of this essay. During the development of exercises in class, that was named 'The Bean Game', a model of logistic growth was simulated. The observed and expected values were mathematically compared by means of the χ^2 test in order to establish their significance and differences. In the discussion and conclusions, the effectiveness of this methodological proposal is shown as well as its importance in the vocational training in Environmental Engineer at La Salle University.

Key Words: model, biotic population, ecological systems, logistic growth equations, Chi square.

* Biólogo MSc. y M. Ed. Postgrado en Genética de Poblaciones, Universidad de Los Andes, Bogotá. Magister en Biología, Universidad Javeriana, Bogotá. Magister en Tecnología Educativa, Universidad de Salamanca (España). Especialización en Sistemas de Información Geográfica, Universidad Distrital (IGAC), Bogotá. Profesor Sistemas Ecológicos de la Facultad de Ingeniería Ambiental y Sanitaria, Universidad de La Salle, Bogotá. Profesor de Postgrado Especialización Gerencia Ambiental, Facultad de Ingeniería de la Universidad Libre, Bogotá.

Correos electrónicos: cesarbejaranom@yahoo.es, cbejarano@lasalle.edu.co

Fecha de recepción: julio 10 de 2006.

Fecha de aprobación: septiembre 5 de 2006.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas ecológicos contienen elementos vivos de interacción e interdependencia regulares entre sí y el medio ambiente, que forman un todo unificado y comprenden básicamente los niveles de organización correspondientes a poblaciones, comunidades, ecosistemas, biomas y biosfera.

La *población* definida como el conjunto de organismos de la misma especie, que habita un área determinada en un tiempo dado, posee una serie de propiedades matemáticas y estadísticas como densidad, natalidad, mortalidad, edad, distribución, potencial biótico, dispersión y forma de desarrollo. Las poblaciones también hacen parte del genotipo poblacional (*pool genético*) que al interactuar con la información ambiental (relaciones organismo-medio ambiente) se traducen en fenotipos, adaptación y capacidad reproductiva, entre otras (Bejarano, 1993). Desde este punto de vista, las poblaciones bióticas se manifiestan como unidades dinámicas caracterizadas por cambios constantes en sus propiedades y que, en definitiva, influyen en sus cambios de tamaño (poblacional). El equilibrio entre las tasas de incremento (n) y las de decremento (m) en el tiempo (t) determinan el tamaño de una población: n' (natalidad + inmigración) = m' (mortalidad + emigración). En un medio ilimitado sin factores limitativos de espacio, alimento y otros organismos, el índice de crecimiento poblacional por individuo por el tiempo es función de las tasas de incremento per cápita:

$$dN / N dt = (n' - m') \quad \text{(Ecuación 1)}$$

La Ecuación 1, representa la velocidad de cambio en el número de organismos en el tiempo y por individuo en un instante particular. Si $(n - m) = r$, la anterior Ecuación se transforma en:

$$dN / N dt = (n - m) = r \quad \text{(Ecuación 2)}$$

El símbolo r que es el exponente en la Ecuación diferencial para el crecimiento de la población en un medio *ilimitado* en determinadas condiciones físicas, se define como la tasa intrínseca del crecimiento o potencial biótico:

$$dN / N dt = rN \quad \text{(Ecuación 3)}$$

$$\text{Integrando entre límites: } \int_{N_0}^N dN = \int_0^t r dt$$

$$\text{Con límites: } \ln N - \ln N_0 = rt \quad \text{(Ecuación 4)}$$

$$\text{Despejando N: } \ln N = \ln N_0 + rt \quad \text{(Ecuación 5)}$$

Graficando esta Ecuación lineal adquiere la forma general de una recta de la forma

$$Y = a + bX \text{ (donde } b = r) \quad \text{(Ecuación 6)}$$

La fórmula integrada exponencial obtenida por manipulación diferencial corresponde al antilogaritmo

$$N_{t+1} = N_0 e^{rt} \quad \text{(Ecuación 7)}$$

siendo r el coeficiente instantáneo de crecimiento de la población. Graficando esta Ecuación se encuentra una relación exponencial cuya curva tiene forma de J.

Con el valor de N_0 podemos evaluar en cualquier t el valor de N_{t+1} (población final), conociendo r . El crecimiento exponencial se comporta como un interés compuesto de nacimientos en la población y es la base conceptual del llamado *crecimiento y selección r* (Smith, 2001).

La tasa neta a la cual las poblaciones cambian también pueden estimarse a partir de R_0 , que es el nú-

mero de veces que aumenta el tamaño de la población después de un tiempo generacional

$$T: N_T = N_0 R_0 \quad \text{(Ecuación 8)}$$

donde N_T es el número de organismos después de un tiempo T ; N_0 es el número de individuos antes del tiempo generacional T ; y R_0 es la tasa neta de incremento.

Las relaciones entre R_0 y r están dadas por la Ecuación:

$$R_0 = e^{rt}; \text{ despejando, } r = \ln R_0 / T \quad \text{(Ecuación 9)}$$

El crecimiento exponencial teórico que puede experimentar una población corresponde al potencial biótico, es decir, a la capacidad máxima de reproducción y descendientes viables por cada tiempo generacional. No obstante, las observaciones de campo y las investigaciones de laboratorio han demostrado que en los ambientes naturales, las poblaciones están sometidas a una serie de condicionamientos naturales que inhiben la exponencialidad o explosiones demográficas. Es lo que se conoce como la **resistencia ambiental**, que controla el número de individuos de la población a un límite o asíntota de su curva de crecimiento K . Son varios los factores propios de la resistencia ambiental, pero básicamente se consideran de origen exógeno y endógeno. Los factores exógenos corresponden a la simbiosis o relaciones ecológicas intraespecíficas e interespecíficas. Las simbiosis intraespecíficas son las conexiones evolutivamente establecidas entre los individuos de la misma especie dentro de la población, como podrían ser el comportamiento social, las competencias por recursos, territorio, apareamientos, la división del trabajo, las migraciones, enfermedades, entre otros. La simbiosis interespecíficas son todas aquellas relaciones evolutivas establecidas entre poblaciones de distin-

tas especies. Los ecólogos las han denominado comensalismo, amensalismo, relación presa-depredador, relación parásito-hospedero y competencias interespecíficas. Las simbiosis mencionadas se califican como positivas (+), neutras (0) y negativas (-). Por ejemplo, cuando la interacción de dos poblaciones A y B de diferentes especies facilitan la reproducción y el aumento del número de individuos de las poblaciones, se dice que se añaden términos positivos a sus ecuaciones de crecimiento poblacional. En este caso, los valores de r son positivos y se suman en el tiempo generacional al $\ln N_0$, según se aprecia en la Ecuación 5. Y viceversa. Los factores endógenos son esencialmente de tipo genético, pero influenciados en gran medida por la información ambiental.

Las gráficas resultantes del crecimiento en un medio limitado de recursos y sometido a los factores de la resistencia ambiental, generalmente se han observado ser de tipo sigmoide (en forma de S). La curva logística corresponde a tres fases del crecimiento: en la primera, los organismos pueden presentar un crecimiento retardado mientras se ajustan a las condiciones ambientales; en la segunda, hay un crecimiento exponencial sin limitaciones hasta $K/2$ o punto de inflexión, que corresponde a las presiones de la resistencia ambiental sobre la densidad poblacional. En la tercera fase, la curva se hace asíntótica cuando $N_{t+1} = K$ y los valores del número de individuos oscila alrededor del valor de K . El desarrollo de la Ecuación diferencial que describe el modelo logístico de crecimiento, se debe a los investigadores Lotka y Volterra (Franco *et al.*, 1995:69):

$$dN/dt = rN (K-N/K) \quad \text{(Ecuación 10)}$$

donde, si $N = 0$; $dN/dt = rN$ (crecimiento exponencial)

si $N=K$; $dN/dt=0$ (no hay crecimiento)

La interacción de la Ecuación 10 da como resultado la siguiente Ecuación:

$$N_{t+1} = K/1 + e^{a-rt} \quad \text{(Ecuación 11)}$$

Donde, N_{t+1} = número de individuos en un tiempo t .

K = capacidad de carga del ambiente, es decir, número máximo de individuos de una población dada que el ecosistema es capaz de soportar. Sus valores corresponden a la asíntota de las curvas logísticas y generalmente se calcula a partir de la media geométrica (μ_g). K es el resultado de la resistencia ambiental que el ambiente ejerce sobre las poblaciones. K también se puede calcular a partir de la Ecuación 14.

a = factor proporcional al número inicial de individuos.

t = tiempo.

r = tasa instantánea de crecimiento poblacional.

Despejando a en la Ecuación 11:

$$a = \ln(K - N_0)/N_0 \quad \text{(Ecuación 12)}$$

La transformación lineal de la Ecuación 12 es:

$$N_{t+1}(1 + e^{a-rt}) = K \quad \text{(Ecuación 13)}$$

$$\text{Multiplicando: } N_{t+1} + N_{t+1}e^{a-rt} = K \quad \text{(Ecuación 14)}$$

El énfasis de este artículo se centró en uno de los aspectos más estudiados de la dinámica poblacional que es el crecimiento de las poblaciones naturales, caracterizado por el aumento o disminución del número de sus organismos en el tiempo, en obediencia a múltiples factores.

Este artículo se propuso innovar la aplicación del modelo de simulación del crecimiento poblacional logístico empleando el juego denominado *El Frijolero*, de fácil realización por los estudiantes. Busca ser una estrategia didáctica para los procesos de construcción del conocimiento de la asignatura Ecología General y Sistemas Ecológicos, en lo concerniente al desarrollo conceptual y matemático de la dinámica poblacional (Odum, 1972: 179; Hutchinson, 1981: 13; Franco *et al.*, 1995: 57 y 69; Smith y Smith, 1998: 150; Bejarano, 1993 y 2005).

MATERIALES Y MÉTODOS

Para la realización de los ejercicios, se empleó un tablero de ajedrez con cuadrículas de 5x 5 cm (aproximadamente) o un dibujo en cartulina blanca con cuadros blancos y negros. El perímetro del tablero se rodea con 4 láminas de cartón, aseguradas unas a otras con cinta pegante para evitar la salida de los frijoles. Los organismos de la población se representaron con aproximadamente 100 frijoles, que se arrojaron a 30 cm de altura sobre el tablero desde un vaso grande de plástico.

Durante el desarrollo del ejercicio, se simuló el crecimiento poblacional logístico cuya metodología se describe a continuación (Franco *et al.*, 1995: 61; Bejarano, 2005).

Se consideró un organismo que se reproduce por bipartición y que la población se inició a partir de un individuo ($N_0=1$). Las condiciones del juego de simulación, fueron: si un individuo (frijol) caía aislado en un cuadro, se reproducía por dos ($C=2$). Si dos frijoles caían en el mismo cuadro, no se reproducían pero persistían en la siguiente generación t (A). Si caían tres o más frijoles en el mismo cuadro, todos ellos morían (no aparecían en la siguiente generación).

Se diseñó una tabla de datos con nueve columnas, nombradas teniendo como modelo la Tabla 1, así:

t=tiempo; N_0 =Población inicial; M=Número de muertos; S=Número de sobrevivientes ($S=N_0-M$; $S=C+A$); C=Individuos que se reproducen por dos ($C*2$); A=Individuos que no se reproducen pero persisten en la siguiente generación (= agregados); N_{t+1} =Número de individuos que pasan a la siguiente generación t ($N_{t+1}=C*2 + A$); R_0 = tasa neta de incremento poblacional ($R_0=e^{rt}$); r= tasa intrínseca de crecimiento o Potencial Biótico de la población ($r=\ln R_0/t$).

Se diseñó igualmente una tabla de datos esperados de crecimiento poblacional logístico, calculados a partir de las ecuaciones poblacionales de Lotka-Volterra, en escalas logarítmica y aritmética (ver Tabla 2). A continuación se modeló una tabla como la número 3, con cinco columnas denominadas así: t; N_0 ; a= Factor proporcional al número inicial de individuos ($a=\ln(K-N_0/N_0)$); r; $N_{t+1} = K/1+e^{-at}$.

Con base en estas tablas de datos se obtuvieron las gráficas correspondientes al comportamiento de la población en t.

El Chi cuadrado (χ^2) de la Tabla 4 se calculó mediante la fórmula:

$$\chi^2 = \frac{\sum(O-E)^2}{E}$$

donde O=Valores observados o empíricos; E=Valores esperados matemáticamente.

El valor de K empleado en la Tabla 3 se calculó mediante la media geométrica (μ_G) de los diez últimos datos de N_0 , según la expresión:

$$\mu_G = \sqrt[n]{X_1 X_2 \dots X_n}$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Realizados los ejercicios de aplicación del modelo por parte de los estudiantes en la sesión de clase de

la asignatura Sistemas Ecológicos y Ecología General, se obtuvieron las tablas de datos y las Gráficas correspondientes a las curvas de crecimiento poblacional logístico. El autor hizo los desarrollos matemáticos de las tablas.

Se hicieron 25 lanzamientos de frijoles sobre el tablero de ajedrez, obteniéndose los valores consignados en la Tabla 1, titulada 'Juego de simulación de crecimiento población logístico, donde $N_0=1$ y $C=2$ '. Con base en la población inicial (N_0) y en la final (N_{t+1}) para cada tiempo generacional (t), se calcularon los valores de R_0 y de r. En las poblaciones naturales r no es un valor constante como se aprecia en la Tabla 1, puesto que la natalidad (n) y la mortalidad (m) son parámetros poblacionales que cambian en función de la densidad y de los factores de resistencia ambiental. Los r positivos ($r > 0$) son términos que *adicionan* valores positivos a las ecuaciones de crecimiento poblacional (como en $\ln N_{t+1} = \ln N_0 + rt$ y en $N_{t+1} = N_0 e^{rt}$ de la Tabla 2) e implican un aumento en el número de organismos. Por el contrario, los r negativos ($r < 0$) *adicionan* valores negativos e implican un decremento en el número de organismos de la población (ver Tabla 2). La Ecuación $R_0 = e^{rt}$ muestra las correspondencias entre estas dos R_0 . Despejando $r = \ln R_0 / t$.

Las relaciones de r con n (natalidad) y con m (mortalidad) se hacen muy evidentes en las Gráficas 1, 2 y 3, donde fácilmente se aprecia que: si $n > m$ entonces $r > 0$ y la población se incrementa; si $n = m$ entonces $r = 0$ y la población se mantiene constante; y si $n < m$ entonces $r < 0$ y la población decrece y puede llegar a extinguirse.

La Tabla 2 muestra los datos esperados de crecimiento poblacional logístico, calculados a partir de las ecuaciones poblacionales de Lotka-Volterra, en escalas logarítmica y aritmética.

La Tabla 3, por su parte, corresponde a la predicción del tamaño de la población para cada genera-

ción t , calculada a partir de la Ecuación $N_{t+1} = K / (1 + e^{a-rt})$, donde la media geométrica de las diez últimas generaciones es $\mu_G = 48,342$, valor éste correspondiente a la capacidad de porte (K) del ecosistema para la población en estudio. Se eliminaron los valores $N_0 > K$. Los datos de N_0 y de r se tomaron de la Tabla 1. Se puede apreciar que los valores observados (O) o empíricos N_0 son muy semejantes a las variables esperadas (E) por la predicción, tal como se comprobó mediante la prueba del Chi cuadrado demostrada en la Tabla 4 y en la Gráfica 4. A un nivel de probabilidad de 0,05 y 16 grados de libertad, el χ^2 calculado mediante los datos empíricos resultó menor al valor crítico o χ^2 tabulado igual a 34,3. Con ello se demostró que no habían diferencias significativas entre O y E , aceptándose en consecuencia la hipótesis nula (H_0) y rechazándose la hipótesis alterna (H_1).

Por su parte, se graficaron los datos de las Tablas 1, 2, 3 y 4, obteniéndose las siguientes Gráficas:

La Gráfica 1 es la gráfica en escala aritmética de N_{t+1} vs t del crecimiento logístico observado en el juego de simulación, según datos de la Tabla 1. La Gráfica también coincide con la Ecuación $N_{t+1} = N_0 e^{rt}$. La curva es de tipo sigmoide propia del crecimiento logístico y básicamente cumple las tres fases de este tipo de curva: fase demorada, tendencia exponencial y fase de equilibrio, donde los números poblacionales de cada t oscilan alrededor de K .

La Gráfica 2 con base en la Tabla 2 es la curva correspondiente a la Ecuación $\ln N_{t+1} = \ln N_0 + rt$ graficada en escala logarítmica y que prácticamente muestra la tendencia de la Gráfica 1.

La Gráfica 3 son las curvas comparativas a escala aritmética entre los valores empíricos N_0 y los espe-

rados, calculados por la Ecuación $N_{t+1} = K / (1 + e^{a-rt})$. El análisis de las gráficas 3 y 4 permite comprobar la escasa diferencia entre las variables observadas y esperadas, apoyado por la prueba del Chi cuadrado. En consecuencia, la Ecuación en referencia base de la Gráfica 3 es un buen estimativo para predecir números poblacionales logísticos en un tiempo generacional t .

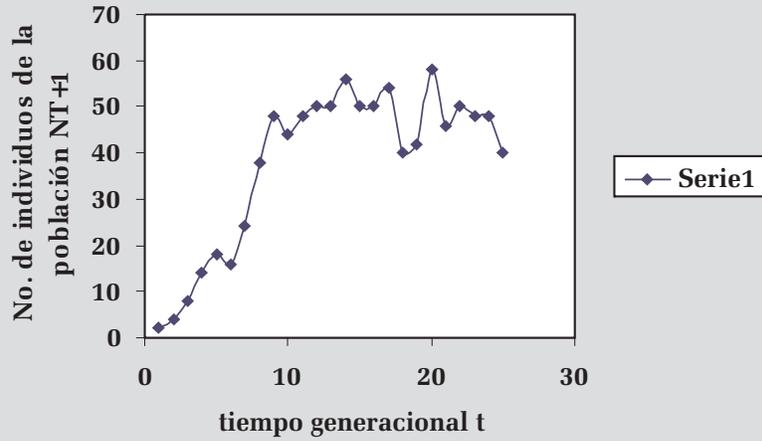
CONCLUSIONES

El modelo de crecimiento logístico poblacional con $C = 2$ y $N_0 = 1$ mostró una clara tendencia logística evidenciada en la curva sigmoidea, que muestra las tres fases propias de este tipo de crecimiento y que corresponde a las ecuaciones $dN/dt = r(K - N/K)$ y $N_{t+1} = K / (1 + e^{a-rt})$. La resistencia ambiental que provoca el punto de inflexión de la curva en $K/2$, establece los promedios geométricos de la capacidad de porte K para cada una de las poblaciones que conforman el ecosistema. Alrededor de K oscilan los números de incremento y decremento de los individuos de la población.

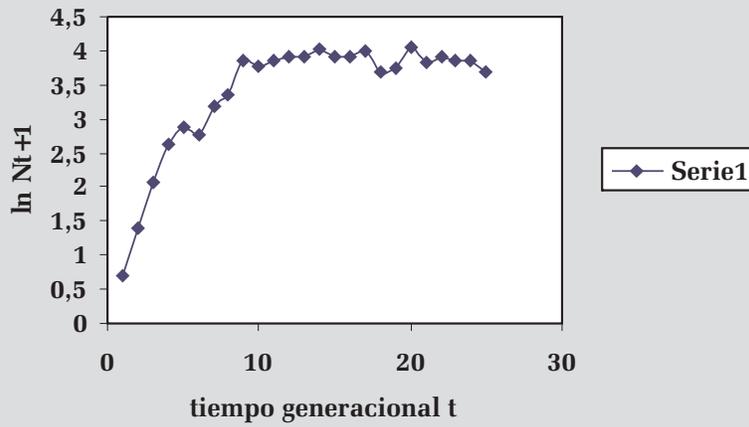
La aplicación de modelos metodológicos de laboratorio como los propuestos en este artículo, se constituye en magníficas estrategias didácticas de clase, que facilitan la construcción del conocimiento por parte del estudiante en los procesos de enseñanza-aprendizaje de temas ecológicos, como éste del crecimiento poblacional.

Los modelos matemáticos y estadísticos trabajados permiten abordar conceptualmente temas un tanto complejos y abstractos, contextualizando fenómenos específicos como el del crecimiento poblacional, a través de juegos de simulación y de la aplicación de las ecuaciones propias de este proceso, como las desarrolladas por Lotka y Volterra, entre otros.

GRÁFICA 1. GRÁFICA EN ESCALA ARITMÉTICA DE N_{t+1} Vs. t , DEL CRECIMIENTO LOGÍSTICO, SEGÚN DATOS OBSERVADOS EN LA TABLA 1. LA GRÁFICA TAMBIÉN COINCIDE CON LA ECUACIÓN $N_{t+1} = R_0 e^{-rt}$.



GRÁFICA 2. GRÁFICA EN ESCALA LOGARÍTMICA CORRESPONDIENTE A LA ECUACIÓN $\ln N_{t+1} = \ln N_0 + r t$, (SEGÚN DATOS DE LA TABLA 2).



GRÁFICA 3. GRÁFICA COMPARATIVAS A ESCALA ARITMÉTICA ENTRE VALORES EMPÍRICOS N_0 Y VALORES ESPERADOS CALCULADOS POR LA ECUACIÓN $N_{t+1} = K / (1 + e^{-A - rt})$ (SEGÚN DATOS DE LA TABLA 3).

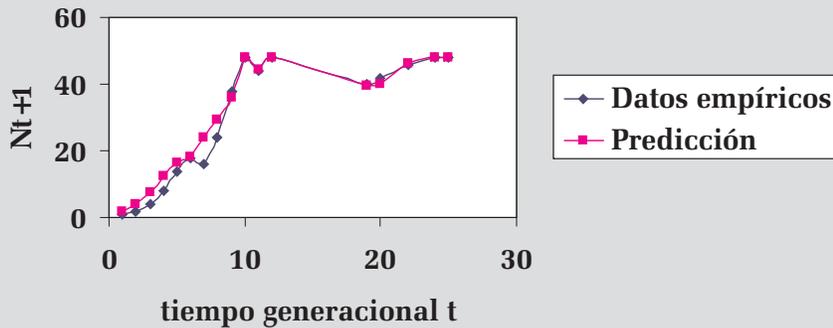


TABLA 1. JUEGO DE SIMULACIÓN DEL CRECIMIENTO POBLACIONAL LOGÍSTICO, DONDE $N_0 = 1$ Y $C = 2$. CÁLCULO DE R_0 Y r .

t	N_0	M	S	$C*2$	A	$N_{t+1} = C*2 + A$	$R_0 = N_{t+1}/N_0$	$r = \ln R_0 / t$ $t = 1$
1	1	0	1	$1*2 = 2$	0	2	2	0.6931
2	2	0	2	$2*2 = 4$	0	4	2	0.6931
3	4	0	4	$4*2 = 8$	0	8	2	0.6931
4	8	0	8	$6*2 = 12$	2	14	1.75	0.5596
5	14	5	9	$9*2 = 18$	0	18	1.2857	0.2513
6	18	10	8	$8*2 = 16$	0	16	0.8888	-0.1177
7	16	3	13	$11*2 = 22$	2	24	1.5	0.4054
8	24	3	21	$17*2 = 34$	4	38	1.5833	0.4595
9	38	8	30	$18*2 = 36$	12	48	1.2631	0.2336
10	48	19	29	$15*2 = 30$	14	44	0.9166	-0.0870
11	44	15	29	$19*2 = 38$	10	48	1.0909	0.0870
12	48	14	34	$16*2 = 32$	18	50	1.0416	0.0482
13	50	20	30	$20*2 = 40$	10	50	1	0
14	50	15	35	$21*2 = 42$	14	56	1.12	0.1133
15	56	23	33	$17*2 = 34$	16	50	0.8928	-0.1133
16	50	17	33	$17*2 = 34$	16	50	1	0
17	50	20	30	$24*2 = 48$	6	54	1.08	0.0769
18	54	23	31	$9*2 = 18$	22	40	0.7407	-0.3001
19	40	16	24	$18*2 = 36$	6	42	1.05	0.0487
20	42	6	36	$22*2 = 44$	14	58	1.3809	0.3227
21	58	25	33	$13*2 = 26$	20	46	0.7931	-0.2318
22	46	16	30	$20*2 = 40$	10	50	1.0869	0.0833
23	50	20	30	$18*2 = 36$	12	48	0.96	-0.0408
24	48	18	30	$18*2 = 36$	12	48	1	0
25	48	19	29	$11*2 = 22$	18	40	0.8333	-0.1823

Convenciones:

t = tiempo generacional

N_0 = población inicial

M = número de muertos

S = número de sobrevivientes ($S = N_0 - M$). $S = C + A$

C = individuos que se reproducen por 2. ($C*2$)

A = individuos que no se reproducen pero persisten a la siguiente generación (= agregados)

N_{t+1} = número de individuos que pasan a la siguiente generación t. $N_{t+1} = C*2 + A$.

R_0 = tasa neta de incremento poblacional. $R_0 = e^r$

r = tasa intrínseca de crecimiento o potencial biótico de la población.

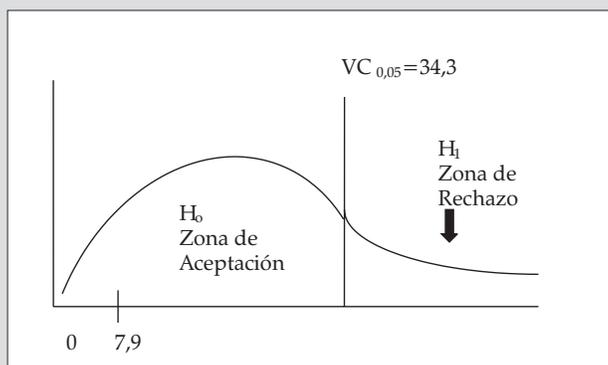
TABLA 2. DATOS ESPERADOS DEL CRECIMIENTO POBLACIONAL LOGÍSTICO, CALCULADOS A PARTIR DE LAS ECUACIONES POBLACIONALES DE LOTKA-VOLTERRA. (SEGÚN TABLA 1).

t	Escala logarítmica	Escala aritmética	
	$\ln N_{t+1} = \ln N_0 + rt$ t = 1	$N_{t+1} = N_0 e^{rt}$ t = 1	$N_{t+1} = N_0 R_0$
1	$\ln N_{t+1} = \ln 1 + 0.6931t$ = 0.6931 Antilog = 1.999	$N_{t+1} = 1 e^{0.6931t}$ = 1.999	$N_{t+1} = 1 * 2$ = 2
2	$\ln N_{t+1} = \ln 2 + 0.6931t$ = 1.386 (= 3.999)	$N_{t+1} = 2e^{0.6931t}$ = 3.999	$N_{t+1} = 4$
3	$\ln N_{t+1} = \ln 4 + 0.6931t$ = 2.079 (= 7.999)	$N_{t+1} = 4e^{0.6931t}$ = 7.999	$N_{t+1} = 8$
4	$\ln N_{t+1} = \ln 8 + 0.5596t$ = 2.639 (= 13.999)	$N_{t+1} = 8e^{0.5596t}$ = 13.999	$N_{t+1} = 14$
5	$\ln N_{t+1} = \ln 14 + 0.2513t$ = 2.890 (= 17.999)	$N_{t+1} = 14e^{0.2513t}$ = 17.999	$N_{t+1} = 17.999$
6	$\ln N_{t+1} = \ln 18 + (-0.1177t)$ = 2.772 (= 16.001)	$N_{t+1} = 18e^{-0.1177t}$ = 16.001	$N_{t+1} = 15.998$
7	$\ln N_{t+1} = \ln 16 + 0.4054t$ = 3.177 (= 23.998)	$N_{t+1} = 16e^{0.4054t}$ = 23.998	$N_{t+1} = 24$
8	$\ln N_{t+1} = \ln 24 + 0.4595t$ = 3.637 (= 37.998)	$N_{t+1} = 24e^{0.4595t}$ = 37.998	$N_{t+1} = 37.998$
9	$\ln N_{t+1} = \ln 38 + 0.2336t$ = 3.871 (= 47.999)	$N_{t+1} = 38e^{0.2336t}$ = 47.999	$N_{t+1} = 47.997$
10	$\ln N_{t+1} = \ln 48 + (-0.087t)$ = 3.784 (= 44.000)	$N_{t+1} = 48e^{-0.087t}$ = 44.000	$N_{t+1} = 43.996$
11	$\ln N_{t+1} = \ln 44 + 0.087t$ = 3.871 (= 47.990)	$N_{t+1} = 44e^{0.087t}$ = 47.90	$N_{t+1} = 47.999$
12	$\ln N_{t+1} = \ln 48 + 0.0482t$ = 3.919 (= 50.37)	$N_{t+1} = 48e^{0.0482t}$ = 49.996	$N_{t+1} = 50$
13	$\ln N_{t+1} = \ln 50 + 0t$ = 3.912 (= 50)	$N_{t+1} = 50e^{0t}$ = 50	$N_{t+1} = 50$
14	$\ln N_{t+1} = \ln 50 + 0.1133t$ = 4.025 (= 55.998)	$N_{t+1} = 50e^{0.1133t}$ = 55.998	$N_{t+1} = 56$
15	$\ln N_{t+1} = \ln 56 + (-0.1133)t$ = 3.912 (= 50)	$N_{t+1} = 56e^{-0.1133t}$ = 50	$N_{t+1} = 49.996$
16	$\ln N_{t+1} = \ln 50 + 0t$ = 3.912 (= 50)	$N_{t+1} = 5e^{0t}$ = 50	$N_{t+1} = 50$
17	$\ln N_{t+1} = \ln 50 + 0.0769t$ = 3.988 (= 53.996)	$N_{t+1} = 50e^{0.0769t}$ = 54	$N_{t+1} = 54$
18	$\ln N_{t+1} = \ln 54 + (-0.300)t$ = 3.688 (= 40)	$N_{t+1} = 54e^{-0.3t}$ = 39.997	$N_{t+1} = 39.997$
19	$\ln N_{t+1} = \ln 40 + 0.0487t$ = 3.737 (= 41.996)	$N_{t+1} = 40e^{0.0487t}$ = 41.996	$N_{t+1} = 42$

TABLA 3. PREDICCIÓN DEL TAMAÑO DE LA POBLACIÓN PARA CADA GENERACIÓN T, CALCULADA A PARTIR DE LA ECUACIÓN $N_{t+1} = K / (1 + e^{A-rt})$, DONDE LA MEDIA GEOMÉTRICA DE LAS 10 ÚLTIMAS GENERACIONES ES $\mu_G = 48.342$, VALOR ÉSTE CORRESPONDIENTE A LA CAPACIDAD DE PORTE DEL ECOSISTEMA PARA LA POBLACIÓN EN ESTUDIO. SE ELIMINARON LOS VALORES $N_0 > K$. LOS DATOS DE N_0 Y DE R SE TOMARON DE LA TABLA 1. LA LETRA **A** ES EL FACTOR PROPORCIONAL AL NÚMERO INICIAL DE INDIVIDUOS.

t	Observado= N_0	Esperado= N_{t+1}	Diferencia d	d^2	$\chi^2 = d^2/E$
1	1	1,96	-0,96	0,9216	0,4702
2	2	3,84	-1,84	3,3856	0,8816
3	4	7,40	-3,40	11,55	1,5621
4	8	12,46	-4,45	19,8916	1,5964
5	14	16,62	-2,62	6,8644	0,4130
6	18	18,26	-0,26	0,0676	0,0037
7	16	23,80	-7,8	60,84	2,5563
8	24	29,47	-5,47	29,9209	1,153
9	38	36	2	4	0,1111
10	48	48,05	-0,05	0,025	0
11	44	44,35	-0,35	0,1225	0,0027
12	48	48	0	0	0
19	40	39,68	0,32	0,1024	0,0025
20	42	40,01	1,99	3,9601	0,0989
22	46	46,21	-0,21	0,0441	0,0009
24	48	48	0	0	0
25	48	48,10	-0,1	0,01	0,0002
$\Sigma \chi^2$					7,9153

FIGURA 4. COMPARACIÓN GRÁFICA DE LOS VALORES DE χ^2 TABULADO (VC 0,05 Y GL 16) VS. χ^2 CALCULADO PARA ACEPTACIÓN/RECHAZO DE LAS HIPÓTESIS.



BIBLIOGRAFÍA

- Bejarano, C. «Medio Ambiente-Organismo desde las Ciencias Naturales y Humanas». *Opciones Pedagógicas 9 Universidad Distrital Francisco José de Caldas* (1993): 63-69.
- Bejarano, C. «Modelos de simulación para el estudio del crecimiento poblacional exponencial». *Épsilon 4. Universidad de La Salle*. (2005): 69-81.
- Franco, J. *et al. Manual de ecología*, México: Trillás, 1995.
- Hutchinson, E. *Introducción a la ecología de poblaciones*, España: Blume, 1981.
- Odum, E. *Ecología*, México: Nueva Editorial Interamericana, 1972.
- Smith, R. y Smith, T. *Ecología* (4ª Ed.) México: Addison Wesley Longman, 2001.