

# Cálculo de la profundidad de flujo crítica en canales circulares mediante métodos de aproximación no convencionales

Giovanni Salazar García\*

Fecha de envío: 24 de septiembre de 2009

Fecha de aceptación: 1º de marzo de 2010

## RESUMEN

Este artículo presenta un sistema de algoritmos de fácil implementación para el cálculo de la profundidad crítica de flujo en ductos circulares. Además, muestra la aplicación de métodos numéricos no tradicionales en la solución de problemas hidráulicos que involucran flujo a superficie libre en canales.

**Palabras clave:** flujo crítico, profundidad crítica, flujo a superficie libre, canales circulares, métodos abiertos de solución numérica, hidráulica computacional.

## CALC OF THE CRITICAL DEPTH OF FLOW IN CIRCULAR CHANNELS USING NON TRADITIONAL METHODS OF APROXIMATION

### ABSTRACT

This article presents an algorithm system of easy implementation for the calculation of the critical depth of flow in circular ducts. Besides, it shows the application of non-traditional numerical methods in the solution of hydraulic problems that involves open channel flow.

**Keywords:** critical flow, critical depth, open channel flow, circular channels, open methods for numeric solution, computational hydraulics.

\* Ingeniero Civil, Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito. Ingeniero electricista, Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito. Estudiante Magíster en Ingeniería Civil con énfasis en Recurso Hidráulico e Hidrosistemas, Universidad de los Andes. Correo electrónico: g.salazar140@uniandes.edu.co

## INTRODUCCIÓN

El cálculo de la profundidad crítica en ductos circulares es un problema que se presenta de manera continua en el diseño de sistemas de transporte de fluidos. Sin embargo, la complejidad matemática de las expresiones que deben trabajarse y la naturaleza de las mismas hacen imposible plantear soluciones explícitas para el caso general. Sumado a esto, la labor de implementar un método de aproximación tradicional, como el esquema de punto fijo, el método de la secante o el método de Newton Raphson (Press et ál., 2007), es sumamente compleja y ninguno de los métodos numéricos convencionales ofrece convergencia para todas las condiciones de flujo posibles.

Como alternativa a la problemática anterior existen métodos de solución nomográficos (City of Austin Department of Public Works, 1977), estadísticos (Straub, 1978) y otros, basados en curvas (L.A. City Bureau of Engineering, 1992). Sin embargo, la incertidumbre y poca precisión que ofrecen en comparación con la que puede obtenerse actualmente con las herramientas disponibles significa una práctica deficiente de ingeniería. En consideración de lo anterior, el autor ha desarrollado una manera sencilla y eficaz de dar respuesta al problema alcanzando gran precisión en los resultados.

### EL PROBLEMA DE LA PROFUNDIDAD CRÍTICA EN TUBERÍAS

La profundidad crítica de flujo se presenta continuamente en el diseño de estructuras hidráulicas, ya que es la altura de la lámina de agua medida desde el fondo de un ducto en aquellas situaciones en las cuales se descarga libremente lo que hace que el control aguas abajo en los casos de flujo subcrítico cuando es necesario realizar cálculos de flujo gradualmente variado (Butler y Davis, 2000) para obtener análisis más detallados como en sistemas de drenaje urbano

y conducciones de fluidos a superficie libre. Adicionalmente, establecer la condición de flujo crítico es la base para identificar el estado en que el flujo se encuentra, con la finalidad de caracterizar y predecir su comportamiento.

El flujo crítico en un canal se establece cuando las fuerzas inerciales tienen el mismo valor que las fuerzas gravitacionales (Chow, 1988). Dicho de otra forma, esto significa que la relación entre los dos efectos medida por el número de Froude toma el valor de la unidad. Dicha condición puede expresarse según la ecuación (1), que se basa en las ecuaciones (2) y (3).

$$\frac{\alpha * Q^2 * \sqrt{i^2 + 1}}{g} = \frac{A^3}{T}$$

$$F = 1 = \frac{Q}{A\sqrt{g * (A/T) * \cos(\tan^{-1}(i))}/\alpha}$$

$$\cos(\tan^{-1}(i)) = \frac{1}{\sqrt{i^2 + 1}}$$

Donde:

$Q$  : caudal en circulación.

$A$  : área de la sección transversal del flujo en la condición crítica.

$T$  : ancho superficial del flujo en la condición crítica.

$i$  : pendiente longitudinal del canal.

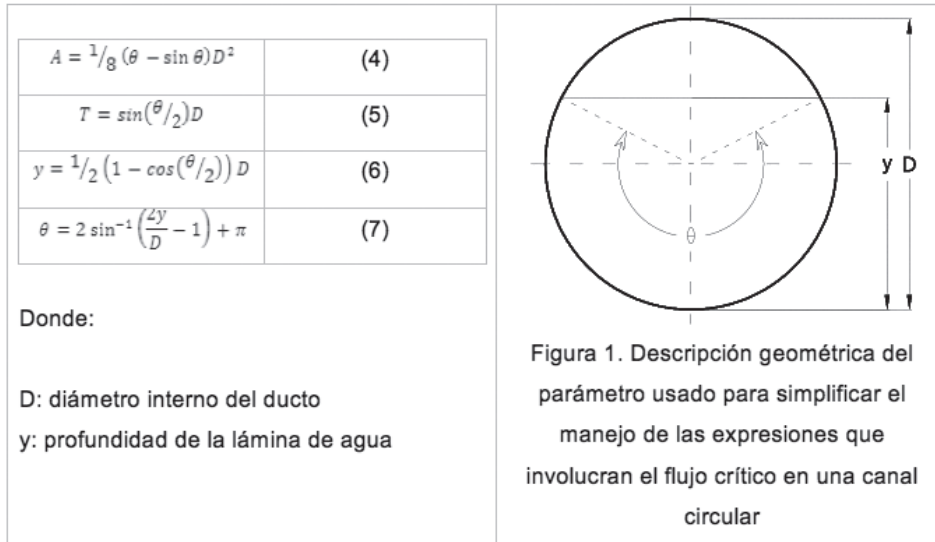
$\alpha$  : coeficiente de Coriolis.

$g$  : aceleración de la gravedad según el sistema de unidades considerado.

Nótese que todos los términos del lado izquierdo de la ecuación (1) son constantes, en contraste con los términos del lado derecho, que hacen referencia a la geometría de la sección transversal del flujo en la condición crítica, que a su vez dependen de la profundidad del flujo. La solución a la ecuación (1) para canales rectangulares y parabólicos es explícita. Para otro tipo de secciones, como la trapezoidal, existen expresiones implícitas de profundidad crítica, en función de la hidráulica y de geometría bastante

aproximadas (Swamee, 2005). Sin embargo, cuando se desea afrontar el problema de la sección circular, la ecuación (1), como función de la profundidad, adquiere un grado de complejidad en cuanto al manejo

de las ecuaciones usadas bastante elevado. Por tal motivo, es necesario realizar el cambio de variable descrito por las ecuaciones (4) y (5), usando el parámetro  $\theta$ , descrito en la figura 1.



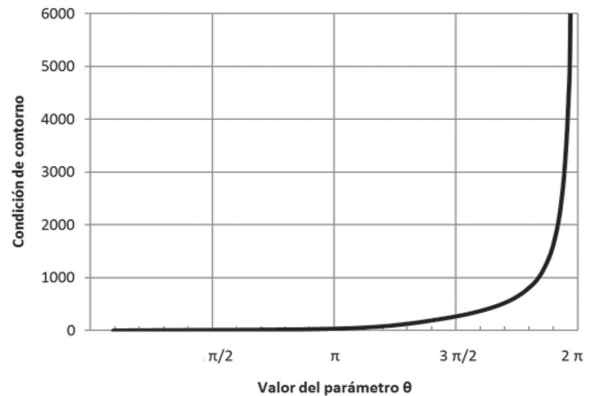
**Figura 1. Descripción geométrica del parámetro usado para simplificar el manejo de las expresiones que involucran el flujo crítico en una canal circular**

Realizado el cambio de variable y después de incluir en la ecuación (1) las ecuaciones (4) y (5), salta a la vista que no es posible encontrar una solución explícita del parámetro  $\theta$ , debido a que la ecuación (2) tiene naturaleza trigonométrica y a la vez polinomial. Adicional a lo anterior, aparece el diámetro interno del ducto como constante, por tal razón, si se desea manejar una ecuación con variables y constantes separadas, resulta más conveniente manejar el problema con base en la ecuación (8)

$$\frac{512 * \alpha * Q^2 * \sqrt{i^2 + 1}}{g * D^5} = \frac{(\theta - \sin \theta)^3}{\sin^3(\theta/2)} \quad (8)$$

El lado izquierdo de la ecuación (6) reúne todas las condiciones del flujo y se le denominará “condición de contorno”, mientras en el lado derecho aparece únicamente el parámetro  $\theta$ , por tal motivo es común

en la práctica que se use la gráfica de la ecuación (8) como base de un nomograma. La gráfica se muestra en la figura 2, sin embargo, para los propósitos de este artículo se prestará mayor atención a dar solución numérica a la ecuación (8).



**Figura 2. Valor de la condición de contorno según la ecuación (8) contra el valor del parámetro  $\theta$  en la condición crítica**

Como se mencionó inicialmente, los métodos tradicionales pueden o no converger en una solución del problema, dependiendo del valor inicial que se utilice como semilla de iteración. En algunos casos, como en el esquema de punto fijo, la convergencia está garantizada si el valor absoluto de la primera derivada de la función es menor que uno (Chapra et ál., 2003), sin embargo, para valores del parámetro  $\theta$  cercanos a  $2\pi$ , la condición tiende a infinito al igual que la derivada de su función, de modo que, para obtener convergencia, el valor de la semilla de iteración debe ser más cercano al valor de la solución de lo que usualmente se puede predecir, causando que se deba recurrir a experimentos de ensayo y error o al uso de programación adaptativa para encontrar un valor semilla adecuado.

Es de gran importancia resaltar la naturaleza siempre creciente de la condición de contorno con respecto al parámetro  $\theta$ , aspecto que se usará para aplicar la metodología de solución que se mostrará más adelante. Adicional a esto, la condición de contorno toma valores indeterminados cuando el parámetro  $\theta$  vale cero, es decir, cuando no hay flujo, y de igual forma se indetermina en la condición de tubo lleno. Esto debido a que en ambos casos el valor del ancho superficial calculado según la ecuación (5) es cero, lo que genera una indeterminación al momento de aplicar el criterio de flujo crítico establecido por la ecuación (1). En el segundo caso, se puede concluir que el flujo deja de comportarse como flujo a superficie libre y empieza a comportarse como flujo a presión. En consecuencia, se debería explicar mediante ecuaciones diferentes a las que se tratan en este artículo. El primer caso es simplemente una trivialidad, pues no se puede hablar de profundidad crítica si no existe flujo.

## METODOLOGÍA DE CÁLCULO

La metodología de cálculo que se va a desarrollar a continuación se fundamenta en que existe un único valor del parámetro  $\theta$  que satisface la condición de flujo crítico para una condición de contorno dada. Otro aspecto a aprovechar es que la formulación de ambas partes de la ecuación 8 es un procedimiento relativamente simple en cualquier lenguaje de programación.

Sacando partido de lo anterior, el procedimiento a aplicar consiste en recorrer la función de condición de contorno variando el parámetro  $\theta$  desde la condición sin flujo hasta encontrar la condición crítica. Sería de esperarse que dicha variación se hiciera en magnitudes muy pequeñas, con el fin de obtener la máxima precisión, pero hacerlo aumentaría el tiempo de cálculo de manera ineficaz e indeseable; por tal motivo, se hace la variación a diferentes escalas de precisión. En un principio, la variación del parámetro se hace en mayor magnitud en contraste con la variación al final, de manera que se puede alcanzar una respuesta con varias cifras decimales de aproximación con un mínimo de esfuerzo computacional.

El manejo de la variación en la precisión se hace mediante el uso de una variable de control que de aquí en adelante se llamará paso. Para encontrar del valor del parámetro  $\theta$  que satisface la condición de flujo crítico se incrementa el valor del parámetro  $\theta$  sumándole el valor del paso y evaluando la condición de contorno, como se expresa en la parte derecha de la ecuación (6). Si la condición calculada es mayor que la condición de contorno esperada, o si el nuevo valor del parámetro es superior a  $2\pi$ , se actualiza el valor del paso, tomando como nuevo valor del paso

dividido entre diez; en el caso contrario se suma el paso al valor del parámetro. Para encontrar el resultado final se sigue con el procedimiento hasta alcan-

zar la precisión deseada. Dicho procedimiento está contenido en el diagrama de flujo de la figura 3, que se muestra a continuación.

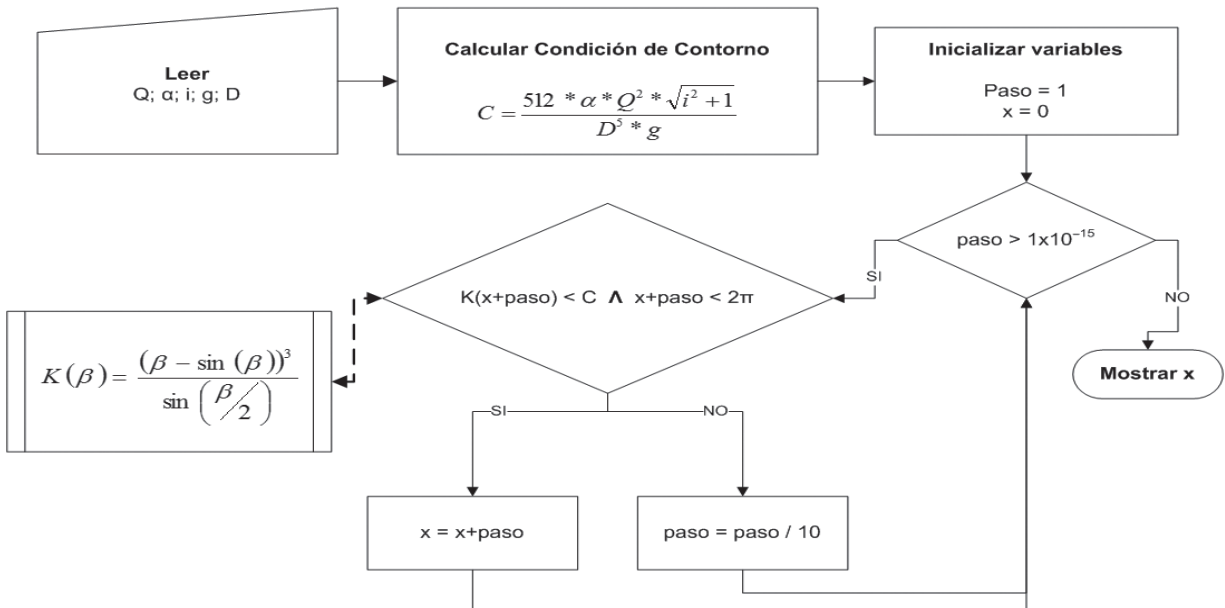


Figura 3. Procedimiento para calcular la profundidad crítica de flujo en un canal circular

### IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO Y CÁLCULO DE LA PROFUNDIDAD CRÍTICA

A continuación se muestra una analogía en forma de algoritmo del diagrama de flujo presentado en la figura 3 en lenguaje Visual Basic, sin embargo, es posible implementar el mismo código en cualquier otro lenguaje de programación.

Nótese que el diagrama de flujo descrito en la figura 3 muestra tan solo la obtención del parámetro  $\theta$  que cumple la condición de flujo crítico. Por tal motivo, en el código mostrado se incluye, además de la subrutina para obtener la condición calculada de contorno, la subrutina para realizar el cambio de variable descrito por la ecuación (6).

Function crítica (q, a, g, i, d) as double

‘Implementado y desarrollado por Giovanni Salazar | [ing.salazar@live.com](mailto:ing.salazar@live.com)

‘Variable a: Coeficiente de Coriolis

‘i: Pendiente longitudinal

‘d: Diámetro del ducto

‘q: Caudal

‘g: Aceleración de la gravedad

Dim c, paso, x As double

paso = 1

x = 0

c = 512 \* a \* q ^ 2 \* (i ^ 2 + 1) ^ (1/2) / (g \* d ^ 5)

While paso > 0.000000000000001

If Kc (x + paso) < c And x + paso < 2 \* Math.PI

Then

x = x + paso

Else

paso = paso / 10

End If

End while

x = Lámina (x, d)

```
Crítica = x
End function
'Subrutina para el calculo de la condicion de contorno
Function Kc (ByVal x)
Kc = (x - Math.Sin(x)) ^ 3 / (Math.Sin(x / 2))
End function
```

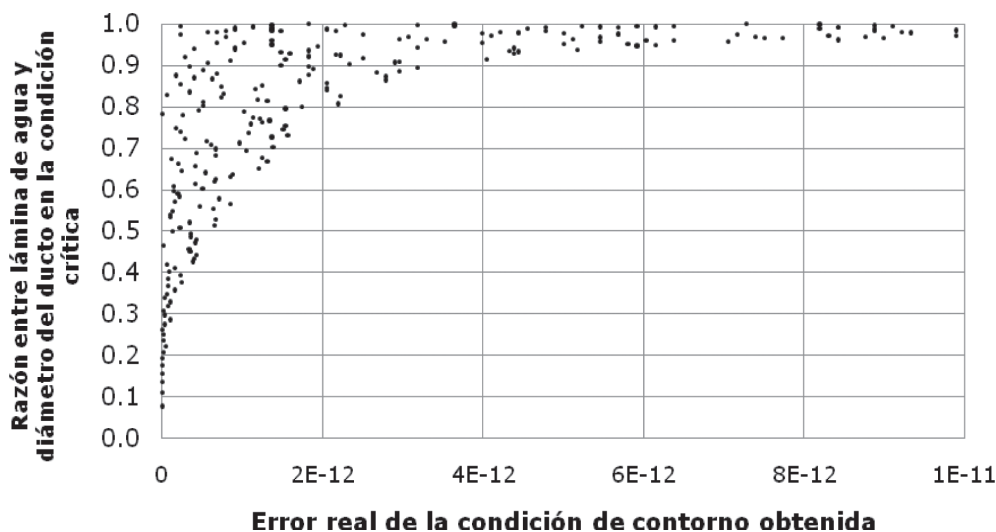
```
'Subrutina para realizar el cambio de variable
Function lámina (ByVal x, ByVal d)
Lámina = (1 - Math.Cos(x / 2)) * d / 2
End function
```

### ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

La figura 4 ilustra la magnitud del error verdadero obtenido al calcular la condición de contorno por medio del algoritmo, graficado contra la razón entre la lámina de agua y el diámetro de la tubería (y/D). Nótese que incluso para los valores más altos del error verdadero, la diferencia entre ambos resultados se presenta a partir de la décima cifra decimal, lo cual ofrece un grado de precisión superior al necesario en la práctica profesional. El diagrama de disper-

sión de la figura 4 fue obtenido reduciendo el valor del paso hasta  $1 \times 10^{-15}$ . Dependiendo de la plataforma de programación, es posible obtener menores valores del paso (y por lo tanto mayores precisiones), debido a que el número de cifras significativas almacenables está definido de diferente manera según el lenguaje en el cual se desee implementar el algoritmo.

Como era de esperarse, debido a que el valor de la condición de contorno tiende a infinito conforme la lámina de agua se acerca a la condición de tubo lleno, la tendencia del error verdadero aumenta en magnitud conforme se está más cerca de dicha posición. Sin embargo, en la práctica, la acostumbrada adopción de un borde libre (López, 2003) permitirá al ingeniero diseñador aplicar esta metodología sin problemas para los rangos de profundidades habituales. Para valores superiores a 0,9 de la relación (y/D), resulta sumamente recomendable implementar el método en lenguajes de programación más agresivos en cuanto al uso de recursos de cálculo, con el fin de llevar el valor del paso a magnitudes más pequeñas y así aumentar la precisión de los resultados obtenidos.



**Figura 4. Gráfico de dispersión del error verdadero observado en la condición de contorno contra la relación entre el diámetro y la lámina de agua en la condición crítica**

## MEJORAS AL MÉTODO

La metodología planteada puede usarse en una menor escala de precisión, con la finalidad de mejorar la convergencia de los métodos de solución discreta. Si no se lleva la magnitud del paso a valores muy pequeños, pero se conserva un nivel de precisión apropiado, puede usarse el resultado de la metodología como semilla de iteración para algún método tradicional,

con el objetivo de reducir el número de iteraciones, lo cual significaría un ahorro en tiempos de cálculo, que pueden llegar a ser considerables en casos como el de la realización de diseños optimizados de sistemas de drenaje en los cuales se repite el procedimiento de cálculo de perfiles de flujo gradualmente variado un gran número de veces, con la finalidad de obtener la solución de menor costo que cumpla con las restricciones hidráulicas y constructivas.

## REFERENCIAS

- Butler, D. y Davies, J. (2000) *Urban Drainage*. Spon Press.
- Chapra, C. (2003) *Numerical Methods for Engineers*. McGraw Hill.
- Chow, V. T. (1988) *Open-Channel Hydraulics*. McGraw Hill.
- City of Austin Department of Public Works. (1977) *Drainage Criteria Manual*. Department of Public Works.
- López, R. (2003) *Elementos de diseño para acueductos y alcantarillados*. Bogotá: Escuela Colombiana de Ingeniería.
- Los Angeles City Bureau of Engineering. (1992): "Bureau of Engineering Manual. *Los Angeles*". *Los Angeles City Department of Public Works* F. Figura f242c.
- Press W. H. et ál. (2007) *Numerical Recipes*. 3ª ed. Cambridge.
- Straub, W. O. (1978): "A Quick and Easy Way to Calculate Critical and Conjugate Depths in Circular Open Channels". *Civil Engineering, ASCE*. 70-71.
- Swamee, P. (2005): "Exact Equations for Critical Depth in a Trapezoidal Canal". *Journal of Irrigation and Drainage Engineering* 131. 5 474-47.