

# Predicción de procesos determinísticos mediante técnicas de interpolación y extrapolación de funciones

Jorge Coronado Padilla\*

Fecha de envío: 20 de enero 2009

Fecha de aceptación: 1º de marzo 2010

## RESUMEN

Las técnicas de interpolación y extrapolación son comúnmente usadas para analizar el comportamiento de procesos determinísticos, y particularmente, para predecir su dinámica en condiciones diversas. El principal inconveniente durante el análisis de un proceso de esta naturaleza se presenta, en el momento de definir la función que lo describe, en puntos críticos o característicos, de interés para el investigador.

Para resolver este problema, es necesario utilizar técnicas de aproximación de funciones orientadas a la predicción de trayectorias como son la interpolación y extrapolación, las cuales se basan en expresiones polinómicas de diverso orden.

**Palabras clave:** procesos determinísticos, interpolación, extrapolación, ecuación de aproximación, ortonormalidad.

## PREDICTION OF DETERMINISTIC PROCESSES BY FUNCTION'S INTER-AND-EXTRAPOLATION TECHNIQUES ABSTRACT

The techniques of interpolation and extrapolation are used to analyze the behavior of deterministic process, particularly to predict this dynamics several conditions. The main disadvantage in the analysis of a process appears on having defined the function that it describes, in critical points of interest of the investigator.

To solve this problem it is necessary to use techniques of approach of functions face to forecast of trajectories as interpolations an extrapolation based on expression of polinomic of different order.

**Key words:** Deterministic Processes, Interpolation, Extrapolation, Approximation Equation, Orthonormal Systems.

\* Ingeniero Electrónico, Instituto Politécnico Kharkov-Ucrania. Especialista en Análisis de Datos, Universidad de La Salle. Especialista en Informática para la Gestión Educativa, Universidad Autónoma de Colombia. Magister en Ciencias de la Ingeniería Instituto Politécnico Kharkov-Ucrania.

## INTRODUCCIÓN

El comportamiento de los procesos en la naturaleza puede ser categorizado como determinístico o aleatorio según sus propias características y particularidades. Tanto unos como otros poseen especificidades que los convierten en objetos fascinantes de estudio y tratamiento matemático y científico.

Los procesos aleatorios se caracterizan por tener un comportamiento dinámico casual, la mayoría de veces, indeterminado, impredecible y no previsible. Los parámetros que los identifican toman valores que varían en el tiempo de manera estocástica a causa de fenómenos y factores diversos que influyen casual y constantemente sobre ellos.

Pueden considerarse aleatorios, procesos tales como:

- Fenómenos climáticos como tormentas eléctricas y huracanes.
- Movimientos telúricos.
- La radiación solar o la descomposición de material radiactivo.
- Los juegos de azar.
- Una partida de ajedrez.
- La llegada de barcos a un puerto.
- El flujo vehicular en una ciudad.
- La vida misma.
- Otros.

Los procesos determinísticos son todos aquellos cuyo comportamiento obedece a un patrón o ley física determinada. Su manifestación es predecible, su trayectoria es fácilmente identificable y las relaciones de operación entre variables corresponden a modelos matemáticos conocidos y predecibles.

Pueden considerarse como determinísticos, procesos tales como:

- El movimiento de cuerpos celestes.

- La mayoría de fenómenos físicos relacionados con la mecánica de cuerpos sólidos (movimiento de un péndulo).
- Desarrollo de un proyecto de acuerdo con un plan o cronograma.
- La multiplicación de dos matrices.
- La ejecución de un programa en computador.

Aunque es común hablar de procesos determinísticos u aleatorios, esta clasificación es muy relativa puesto que en la naturaleza no se encuentran procesos totalmente determinísticos ni fenómenos que no sean factibles de modelarse. Generalmente, un fenómeno real posee un cierto grado de aleatoriedad producido por factores exógenos no controlables que influyen o pueden ejercer cierta influencia sobre él, alterando su carácter determinista.

De los procesos tanto aleatorios como determinísticos pueden analizarse distintos aspectos. Sin embargo, es interés del autor profundizar en uno de los problemas matemáticos más comunes y a la vez más importantes de los fenómenos determinísticos: la predicción del proceso mediante las técnicas de interpolación y extrapolación. Esto obedece a dos razones fundamentales. En primer lugar, el aparato matemático utilizado para el análisis y predicción de procesos determinísticos es mucho más sencillo de aplicar que el definido para los aleatorios. En segundo lugar, los resultados obtenidos durante el análisis de procesos determinísticos pueden ser utilizados, en muchos casos, como elementos de base para el análisis de los procesos aleatorios.

La predicción de este tipo de procesos es un problema que se resuelve con la ayuda de técnicas de análisis matemático y mediante la aplicación de métodos inductivos, los cuales permiten realizar fácilmente el estudio de las causas y los efectos del proceso.

Es muy común, al desarrollar un trabajo de esta naturaleza, que se presenten inconvenientes de proce-

dimiento relacionados con el cálculo de la función descriptora del proceso, cuando ésta es analizada en puntos críticos o para valores que representan interés especial durante el análisis.

Estas condiciones obligan a considerar como alternativa de solución la utilización de aquellas técnicas y herramientas del análisis matemático orientadas hacia la predicción de trayectorias y cuya filosofía se fundamenta en los conceptos de la aproximación analítica de funciones. Se hace referencia a los métodos de interpolación y extrapolación de funciones ya mencionados.

La interpolación consiste en calcular un valor de una función dentro de un intervalo finito de observación. La función puede permanecer desconocida; sin embargo, en la mayoría de los casos, se hace necesario determinar qué clase de función se tiene; se representa o no mediante una línea recta, una parábola, un polinomio cúbico, una relación armónica, etc.

El planteamiento más común del problema de interpolación puede expresarse de la siguiente manera:

“Sean los valores de una función  $x(t)$ , las cantidades  $x(t_i)$  y sea el argumento  $t_i$  un valor perteneciente al intervalo  $[t_0, t_n]$  tal que  $t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n$ . Determinar los valores de  $x(t)$  en los puntos  $t_j$  tal que  $t_i < t_j < t_{i+1}$ ”.

La forma más simple que existe para solucionar este problema es a través del método de interpolación lineal, que implica calcular el valor de la función  $x(t)$  en el punto medio del intervalo  $t_0 < t < t_1$  mediante la siguiente expresión matemática:

$$x(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} [x(t_1) + x(t_0)] \quad (1)$$

La extrapolación es un procedimiento para encontrar los valores de una función en puntos que no per-

tenecen al intervalo de observación. Esto se realiza mediante el análisis de los valores de la función en los puntos que sí pertenecen al intervalo de observación.

Los métodos de solución más comunes para este tipo de problemas son la extrapolación lineal y la extrapolación parabólica, siendo el segundo el de mayor aplicación.

Mediante la extrapolación parabólica, la función analizada quedará representada por parábolas de segundo, tercero o n-ésimo grado, produciendo una función resultado que viene a ser una aproximación a las leyes reales que identifican o controlan el proceso analizado. Por esta razón es válido afirmar, que entre menor sea el tiempo de extrapolación de un proceso, con mayor exactitud se determinarán los valores buscados que lo determinan.

Es importante mencionar que el carácter de la función aproximación debe corresponder con el carácter de la solución obtenida a partir del modelo del proceso o del sistema que lo genera. Por ejemplo, la secuencia de valores obtenidos al medir el ángulo de desviación de un péndulo debe satisfacer un comportamiento oscilatorio armónico. El problema se torna más complejo si la física del proceso o el tipo de función solución esperada, se desconocen.

En situaciones como la planteada anteriormente, el procedimiento a seguir consiste en seleccionar el tipo de función aproximación, de tal forma que ésta cobije a la mayoría de los puntos de análisis dados de la mejor manera posible.

En muchos casos prácticos, la información inicial se presenta como un conjunto finito de valores dados. La interpolación o extrapolación podrá efectuarse entonces, hasta el final, si se logra establecer la expresión analítica que satisfaga todos los puntos del intervalo dado.

Veamos un ejemplo y para tal efecto, se tomará como referencia la distribución de datos que se muestra en la siguiente tabla.

**Tabla 1. Distribución de una función real**

Tiempo t	1	2	3	4	5
Variable X	1,111	1,248	1,417	1,624	1,875

Con el objeto de simplificar el análisis, se asumirá que el conjunto de muestras seleccionado identifica todas las principales propiedades de la función objetivo, es decir, la muestra es lo suficientemente representativa para considerar que todas las posibles variaciones del proceso se registraron y su comportamiento dinámico ha podido ser observado a cabalidad.

Basándose en los datos de la tabla 1, se procederá a seleccionar el polinomio de aproximación comenzando por la expresión más elemental.

Supongamos que el proceso se describe por medio de una línea recta como se muestra en la ecuación (2).

$$x^* = a + bt \tag{2}$$

El asterisco en la variable identifica que la función es tan solo una predicción.

Reemplazando en la ecuación anterior dos valores cualesquiera del conjunto, por ejemplo, el primero y el último, tenemos:

$$\begin{aligned} 1.111 &= a + b(1) \\ 1.875 &= a + b(5) \end{aligned} \tag{3}$$

Para los respectivos valores del argumento  $t$  se tiene:

$$\begin{aligned} 1.111 &= a + b(1) \\ 1.875 &= a + b(5) \end{aligned} \tag{4}$$

La solución del sistema (4) permite determinar los valores de los coeficientes  $a$  y  $b$ . Estos son:

$$a = 0.920$$

$$b = 0.191$$

Los coeficientes  $a$  y  $b$  es necesario calcularlos porque a partir de ellos debemos determinar si “evaluamos” con certeza el supuesto inicial, es decir, que el proceso es lineal. Si se establece el supuesto como verdadero, entonces, podemos concluir que la expresión matemática que lo describe corresponde al polinomio de aproximación buscado, esto es, para el ejemplo dado:

$$x^* = 0.920 + 0.191t \tag{5}$$

Siguiendo esta lógica, calculamos ahora los valores de la función aproximación para los datos del agrupamiento. Obtenemos pues los resultados de la tabla 2.

**Tabla 2. Distribución de la aproximación lineal**

Tiempo t	1	2	3	4	5
Variable X	1,111	1,302	1,493	1,684	1,875

El grado de exactitud obtenido durante la aproximación puede calcularse satisfactoriamente por medio de la varianza matemática y a partir de la siguiente fórmula de cálculo:

$$\sigma^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_2^2 - x_1^2} \cdot 100 \tag{6}$$

Para el caso analizado anteriormente  $\sigma^2 = 2.2\%$ .

Entre menor sea la varianza, mayor es la exactitud del polinomio de aproximación seleccionado y más cerca estarán, entonces, los valores pronosticados de los reales. Esto quiere decir, que se debe tratar de minimizar el error obtenido, seleccionando un nuevo polinomio cuyo grado sea mayor que el del polinomio precedente.

Repetimos pues los cálculos anteriores teniendo en cuenta que el polinomio de aproximación es ahora una parábola, expresada de la siguiente manera:

$$x^t = a + bt + ct^2 \quad (7)$$

Dado que la expresión que se analiza incluye tres coeficientes que se deben calcular, se tomarán tres puntos al azar de la muestra, por ejemplo: el inicial ( $x=1.111$ ), el punto medio ( $x=1.417$ ) y el final ( $x=1.875$ ). El sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente, para los distintos valores de la variable  $t$ .

$$\begin{aligned} 1.111 &= a + b(1) + c(1) \\ 1.417 &= a + b(3) + c(9) \\ 1.875 &= a + b(5) + c(25) \end{aligned} \quad (8)$$

Los coeficientes calculados son:

$$\begin{aligned} a &= 1.015 \\ b &= 0.077 \\ c &= 0.019 \end{aligned}$$

La ecuación de aproximación tomará, entonces, la forma:

$$x^t = 1.015 + 0.077t + 0.019t^2 \quad (9)$$

Reemplazando los valores de  $t$  en la ecuación (9) y resolviendo, obtenemos la distribución de la aproximación cuadrática que se presenta en la tabla 3.

**Tabla. 3. Distribución de la aproximación cuadrática**

Tiempo $t$	1	2	3	4	5
Variable $X$	1,111	1,245	1,417	1,627	1,875

El cálculo de la varianza según (6) arroja como resultado el valor  $\sigma^2 = 0.79\%$ , el cual es considerablemente menor (tres veces) que el obtenido para el polinomio lineal. Esta disminución drástica del error puede mejorarse si analizamos un polinomio de grado tres como el que se presenta a continuación:

$$x^t = a + bt + ct^2 + dt^3 \quad (10)$$

Procediendo de la misma manera que para los polinomios de primero y segundo grado, obtenemos:

$$\begin{aligned} 1.111 &= a + b(1) + c(1) + d(1) \\ 1.417 &= a + b(3) + c(9) + d(27) \\ 1.624 &= a + b(4) + c(16) + d(64) \\ 1.875 &= a + b(5) + c(25) + d(125) \end{aligned} \quad (11)$$

Resolviendo el sistema, encontramos que:

$$\begin{aligned} a &= 1.0 \\ b &= 0.1 \\ c &= 0.01 \\ d &= 0.001 \end{aligned}$$

La varianza es igual a  $\sigma^2 = 0$ . Bajo estas condiciones podemos concluir que el polinomio:

$$x^t = 1.0 + 0.1t + 0.01t^2 + 0.001t^3 \quad (12)$$

Describe la función inicial con la máxima exactitud.

Es posible realizar análisis similares para cualquier otro tipo de agrupamiento muestral, sin embargo, si no fuese factible obtener resultados con  $\sigma^2 = 0$ , entonces se debe asumir que la solución viene dada por aquel polinomio que genere valores en la varianza no mayores al 1%, es decir,  $\sigma^2 < 0.01$ .

Si la varianza alcanza valores significativos y estos no pueden ser reducidos a un mínimo, el proceso analizado debe considerarse como no determinístico.

Otro aspecto importante a tener en cuenta de los polinomios de aproximación es que a partir de ellos es posible calcular aquellos valores de la función que nos interesan, en cualquier instante de tiempo, pasado o futuro.

La tabla 4 registra los datos medidos para la función real cuya ecuación se desconoce, y los valores calculados para las funciones cuyos modelos se definieron con las expresiones (5), (9) y (12). Obsérvese que en

la tabla se tomaron tan sólo cinco mediciones de la función real, pero con los modelos de aproximación se calcularon quince datos.

**Tabla 4. Valores de las funciones de aproximación**

t	Real	f(t)	g(t)	h(t)
1	1,111	1,111	1,111	1,111
2	1,248	1,302	1,245	1,248
3	1,417	1,493	1,417	1,417
4	1,624	1,684	1,627	1,624
5	1,875	1,875	1,875	1,875
6	N.D.	2,066	2,161	2,176
7	N.D.	2,257	2,485	2,533
8	N.D.	2,448	2,847	2,952
9	N.D.	2,639	3,247	3,439
10	N.D.	2,83	3,685	4
11	N.D.	3,021	4,161	4,641
12	N.D.	3,212	4,675	5,368
13	N.D.	3,403	5,227	6,187
14	N.D.	3,594	5,817	7,104

N.D.: No hay datos.

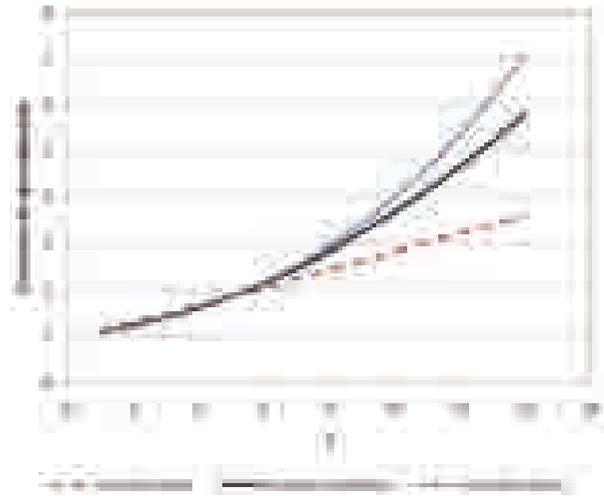
f(t) : Función lineal.

g(t) : Función cuadrática.

h(t) : Función cúbica.

En la figura 1 se presentan las trayectorias de las funciones de aproximación lineal, cuadrática y cúbica.

Dado que el modelo cúbico arrojó un error de aproximación de 0, su trayectoria define, perfectamente, la función real. Es de suponer, entonces, que las trayectorias de la función real y del modelo cúbico se superponen en la figura.



**Figura 1. Aproximación de una función dada**

Un ejemplo más real, hará claridad al respecto. Considérense los datos de los censos de población realizados en Europa en el periodo comprendido entre 1850 y 1930 (Wyatt, 1970) como datos iniciales. En la tabla 5 se presenta la distribución en millones de habitantes.

**Tabla 5. Distribución poblacional en Europa. Periodo 1850-1930**

Año	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930
Población	267	284	306	332	364	399	410	449	491

Supóngase que tan solo son conocidos los datos de 1860, 1870 y 1880. Basados en estos datos determinaremos la población de 1864.

Lo planteado es un problema típico de interpolación y lo resolveremos aplicando la fórmula

de la interpolación cuadrática descrita en la ecuación (7).

Con el objeto de simplificar los cálculos, estableceremos la siguiente identificación de valores:

**Tabla 6. Codificación de valores**

<b>t</b>	-1	0	1
<b>Año</b>	1860	1870	1880

Por tanto, al año 1864 le correspondería un valor de  $t = -0.6$  en la escala de tiempo convenida.

El sistema de ecuaciones tendrá la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} 284 &= a + b(-1) + c(-1)^2 \\ 306 &= a + b(0) + c(0)^2 \\ 332 &= a + b(1) + c(1)^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned} 284 &= a - b + c \\ 306 &= a \\ 332 &= a + b + c \end{aligned} \tag{14}$$

Los coeficientes calculados toman los valores:

$$\begin{aligned} a &= 306 \\ b &= 24 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Al reemplazar estos coeficientes en la fórmula de interpolación cuadrática tenemos:

$$x^* = 306 + 24t + 2t^2 \tag{15}$$

Considerando  $t = -0.6$ , la población estimada para el año 1864 será de:

$$\begin{aligned} x^* (-0.6) &= 306 + 24(-0.6) + 2(-0.6)^2 \\ x^* (-0.6) &= 292.32 \text{ millones de habitantes.} \end{aligned}$$

El resultado se redondea al entero más cercano. Por lo tanto, la población aproximada en Europa en el año 1864 se estima en 292 millones de habitantes.

Ahora bien, dado que una ley que es válida dentro de un determinado intervalo lo es también fuera de

él, podremos calcular la población para otros años. Posiblemente los resultados que se obtengan para los años 1920 y 1930 sean muy similares. Esto tiene su explicación en el hecho de que en esa época el número de muertes se incrementó por causa de la Primera Guerra Mundial y sus nefastas consecuencias ulteriores.

Existen otros métodos de interpolación y extrapolación basados en polinomios especiales que ameritan un tratamiento igualmente detallado. Se hace referencia a la aproximación mediante la expansión en series de funciones ortonormalizadas.

### INTERPOLACIÓN Y EXTRAPOLACIÓN MEDIANTE FUNCIONES ORTONORMALIZADAS

Para la interpolación y extrapolación de la función  $x(t)$  existen varios métodos que se basan en la expansión en serie de funciones ortonormalizadas tales como:

- Polinomios de Laguerre.
- Polinomios de Hermit.
- Series de Taylor.
- Polinomios de Chebychev.

### DEFINICIÓN DE ORTONORMALIDAD

Dos funciones  $x_i(t)$  y  $x_j(t)$  se denominan ortonormales en el intervalo  $(a, b)$  si:

$$\int_a^b x_i(t) \cdot x_j(t) dt = 0; \quad i \neq j \tag{16}$$

y si además de esta condición se cumple que:

$$\int_a^b x_i(t) \cdot x_j(t) dt = 1; \quad i = j \tag{17}$$

entonces, las funciones  $x_i(t)$  y  $x_j(t)$  reciben el nombre de “ortonormalizadas”.

Las funciones ortonormalizadas pueden diferenciarse entre sí de acuerdo con los siguientes criterios:

- a. El intervalo en el cual se busca la aproximación.
- b. El valor del error de aproximación en diferentes secciones del intervalo.
- c. La extensión y el carácter de la expansión.

Analizaremos algunas de las funciones ortonormales más frecuentemente utilizadas.

**POLINOMIOS DE LAGUERRE**

La aproximación de la función  $x(t)$  en el intervalo  $0 < t < \infty$  se realiza por medio de la suma  $S_n(t)$ , la cual está compuesta de  $(n+1)$  polinomios  $L_k$  de orden  $k$ .

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n A_k \cdot L_k(t); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Los polinomios  $L_k(t)$  y los coeficientes  $A_k$  que determinan la función  $x(t)$  se seleccionan de tal forma que el error cuadrático integral con función de peso  $e^{-t}$  en el intervalo  $0 < t < \infty$ , sea mínimo. Es decir:

$$E = \int_0^{\infty} [x(t) - S_n(t)]^2 \cdot e^{-t} dt \rightarrow \min \quad (19)$$

Al aumentar  $t$ , la influencia de la resta entre  $x(t)$  y  $S_n(t)$  disminuye.

Utilizando la ecuación (18) y minimizando el error cuadrático integral, se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial E}{\partial A_k} = 2 \int_0^{\infty} [x(t) - S_n(t)] \cdot L_k(t) \cdot e^{-t} dt = 0 \quad (20)$$

Después de realizar varios cálculos obtenemos:

$$\int_0^{\infty} x(t) L_n(t) e^{-t} dt = A_0 \int_0^{\infty} L_0(t) L_n(t) e^{-t} dt + A_1 \int_0^{\infty} L_1(t) L_n(t) e^{-t} dt + \dots + A_n \int_0^{\infty} L_n(t) L_n(t) e^{-t} dt \quad (21)$$

Si la aproximación de  $x(t)$  se representa por la suma  $S_{n+1}$ , la cual está compuesta por  $(n+2)$  polinomios, entonces, en la expresión (21) aparecerá un sumando adicional:

$$A_{n+1} \cdot \int_0^{\infty} L_{n+1}(t) L_n(t) e^{-t} dt \quad (22)$$

Esta expresión tiende a cero si los coeficientes  $A_k$  se mantienen invariables así aumente el número de polinomios de aproximación.

Cuando se tiene un número finito de coeficientes  $A_k$ , la condición de ortonormalidad queda descrita por la expresión:

$$\int_0^{\infty} L_i(t) L_n(t) e^{-t} dt = 0; \quad i \neq k \quad (23)$$

Los polinomios  $L_k(t)$  son ortonormales si:

$$\int_0^{\infty} L_k^2(t) e^{-t} dt = 1 \quad (24)$$

De las ecuaciones (23) y (24) podemos calcular los valores de  $L_k(t)$ :

$$\begin{aligned}
 L_0 &= 1 \\
 L_1(t) &= -t + 1 \\
 L_2(t) &= \frac{1}{2}t^2 - 2t + 1 \\
 &\vdots \\
 L_n(t) &= \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n (t^n e^{-t})}{dt^n}
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Los coeficientes de la expansión de Laguerre se determinan a partir de la expresión:

$$A_k = \int_0^{\infty} x(t) L_k(t) e^{-t} dt \tag{26}$$

**POLINOMIOS DE HERMIT**

La función  $x(t)$  se puede aproximar en el intervalo  $-\infty < t < +\infty$  por medio de la suma  $S_n(t)$  compuesta de  $(n+1)$  polinomios  $H_k$ :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n A_k H_k(t); \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{27}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) H_k(t) e^{-t^2} dt = A_0 \int_{-\infty}^{\infty} H_0(t) H_k(t) e^{-t^2} dt + A_1 \int_{-\infty}^{\infty} H_1(t) H_k(t) e^{-t^2} dt + \dots + A_n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(t) H_k(t) e^{-t^2} dt \tag{30}$$

Si  $x(t)$  se aproxima por medio de la suma  $S_{n+1}$  de  $(n+2)$  polinomios, entonces, la expresión anterior tendrá un sumando adicional en la parte derecha:

$$A_{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} H_{n+1}(t) H_k(t) e^{-t^2} dt \tag{31}$$

Si este término tiende a cero, los coeficientes  $A_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, n$ ) se mantendrán invariables así cambie el número de polinomios de aproximación.

Los polinomios  $H_k(t)$  y los coeficientes  $A_k$  se seleccionan de tal forma que el error cuadrático integral en el intervalo  $-\infty < t < +\infty$ , sea mínimo:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - S_n(t)]^2 e^{-t^2} dt \tag{28}$$

Donde:

$e^{-t^2}$  - función de peso del error cuadrático integral en el intervalo dado.

La función de peso  $e^{-t^2}$  es par, lo que implica que el error de aproximación es más significativo en los puntos cercanos a  $t=0$ . Al aumentar  $t$ , el error disminuye.

Basados en (27), minimizamos el error:

$$\frac{\partial E}{\partial A_k} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - S_n(t)] H_k(t) e^{-t^2} dt = 0 \tag{29}$$

Al resolver esta ecuación tenemos:

Para un número finito de coeficientes la condición de ortonormalidad se expresa como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_l(t) H_k(t) e^{-t^2} dt = 0; \quad l \neq k \tag{32}$$

La condición de normalización queda entonces definida como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_k^2(t) e^{-t^2} dt = 1 \tag{33}$$

De las propiedades (32) y (33) podemos determinar los polinomios de Hermit así:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= e^{-x^2} & (34) \\
 H_1(x) &= \sqrt{2}(x) e^{-x^2/2} \\
 H_2(x) &= \sqrt{2}(x)^2 e^{-x^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x) e^{-x^2/2} \\
 &\vdots \\
 H_n(x) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{-x^2/2} \frac{d^n e^{-x^2/2}}{dx^n}
 \end{aligned}$$

Los polinomios pares tendrán sólo exponentes pares de  $t$ , los impares sólo exponentes impares.

Los coeficientes de la expansión de Hermit se determinan de la ecuación:

$$A_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) H_k(t) e^{-t^2/2} dt \quad (35)$$

**SERIES DE TAYLOR**

Para lograr una gran precisión en la aproximación de la función  $x(t)$ , en un intervalo reducido, nos valemos de la función de peso impulsiva o Delta de Dirac  $\delta(t)$  y de la expresión:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n A_k \cdot t^k ; k = 0, 1, 2, \dots \quad (36)$$

El problema consiste en minimizar el error cuadrático integral  $E$ , donde:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - S_n(t)]^2 \delta(t) dt \quad (37)$$

Con este fin se determina tan sólo el coeficiente  $A_0 = x(t)$ . Los restantes coeficientes se calculan mediante condiciones auxiliares:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{x'(0)}{1!} \\
 A_2 &= \frac{x''(0)}{2!} \\
 &\vdots \\
 A_n &= \frac{x^{(n)}(0)}{n!}
 \end{aligned} \quad (38)$$

Estas condiciones establecen que las primeras  $n$  derivadas de la suma  $S_n(t)$  cuando  $t=0$  aproximaron con exactitud las primeras  $n$  derivadas de la función  $x(t)$

**POLINOMIOS DE CHEBYCHEV**

Si para la función  $x(t)$  definida en el intervalo finito  $-1 < t < 1$ , la aproximación se realiza bajo la condición de que el error cuadrático integral con función de peso  $1/\sqrt{1-t^2}$  es mínimo, entonces, al igual que para los polinomios de Laguerre y Hermit, existirá un conjunto de polinomios ortonormalizados que la caracterizan. Estos polinomios toman la forma:

$$\begin{aligned}
 T_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} & (40) \\
 T_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot t \\
 T_2(t) &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \left( t^2 - \frac{1}{2} \right) \\
 T_3(t) &= \sqrt{\frac{32}{\pi}} \cdot \left( t^3 - \frac{3}{4} \cdot t \right) \\
 &\vdots \\
 T_n(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \cos(n \cdot \arccos t) ; n \geq 1
 \end{aligned}$$

La función de aproximación  $x(t)$  se determina como una suma:

$$x(t) = \sum_{k=0}^n A_k \cdot T_k(t) \quad (41)$$

Los coeficientes  $A_k$  se calculan a partir de la expresión:

$$A_k = \int_{-1}^1 x(t) \cdot T_k(t) \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (42)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n \cdot \arccos t) \cdot \cos(m \cdot \arccos t) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) \cdot \cos(mt) dt$$

La anterior expresión toma dos valores: 0 si  $n \neq m$ ; y, 1 si  $n = m \geq 1$ .

$$\cos(mt) = \cos^n(z) - \frac{m^2}{2!(n-2)} \cdot \cos^{n-2}(z) \cdot \sin^2(z) + \frac{m^4}{4!(n-4)} \cdot \cos^{n-4}(z) \cdot \sin^4(z) - \dots$$

En la figura 1 se muestran las trayectorias de algunos de los polinomios de Chebychev, multiplicados por el factor  $\sqrt{\pi/2}$ . Tanto del gráfico como de las expresiones dadas en (40) se puede observar que  $\sqrt{\pi/2} \cdot T_n$  posee  $(n-1)$  extremos, todos con magnitud equivalente a la unidad.

La función  $\sqrt{\pi/2} \cdot T_n(t)$  toma valores de uno en ambos extremos del intervalo  $-1 < t < 1$ .

Veamos a continuación un ejemplo de aproximación de la función  $x(t)$  con la ayuda de expansiones en serie de funciones ortonormales.

Sea la función  $e^{-t}$ , la cual se representará a través de los cuatro primeros polinomios de Laguerre y Hermit. Entonces, utilizando la ecuación (26) tenemos:

$$e^{-t} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{4}(-t+1) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}t^2 - 2t + 1\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 3t + 1\right)$$

$$e^{-t} = \frac{15}{16} - \frac{11}{16}t + \frac{5}{32}t^2 - \frac{1}{96}t^3$$

Reemplazando un valor cualquiera de  $t$  en la expresión anterior, podremos calcular el valor de la función que nos interesa en cualquier instante de tiempo.

Las propiedades de ortonormalidad de estos polinomios en el intervalo  $-1 < t < 1$  se corroboran mediante la expresión:

Los polinomios descritos en (40) se pueden obtener de la expresión más general para  $T_n(t)$  si se utiliza la expansión del coseno así:

$$A_k = \int_0^{\pi} x(t) \cdot L_k(t) \cdot e^{-t} dt$$

Por lo tanto:

$$A_0 = \frac{1}{2}$$

$$A_1 = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \frac{1}{8}$$

$$A_3 = \frac{1}{16}$$

La aproximación mediante los polinomios de Laguerre queda descrita como:

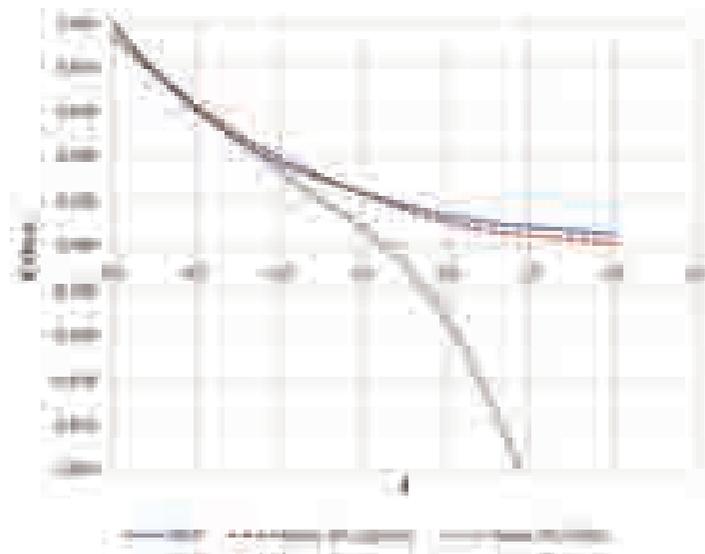
Si realizamos la aproximación de  $x(t) = e^{-t}$  mediante los cuatro primeros términos de la serie de Taylor, el polinomio de aproximación tomará la forma:

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3$$

Los resultados de la aproximación, en los dos casos anteriores, se muestran en la tabla 7 y su comportamiento se presenta en la figura 2.

**Tabla 7. Aproximación de la función exponencial decreciente con polinomios de Laguerre y Taylor**

t	EXP(-t)		
	Valores reales	Aproximación por polinomios de Laguerre	Aproximación por polinomios de Taylor
0,0	1,000	0,938	1,000
0,1	0,905	0,871	,0,905
0,2	0,819	0,806	0,819
0,3	0,741	0,746	0,740
0,4	0,670	0,687	0,699
0,5	0,607	0,632	0,604
1,0	0,368	0,396	0,333
2,0	0,135	0,106	-0,333
3,0	0,050	0,008	-2,011



**Figura 2. Aproximación de la función EXP(-t)**

La gráfica muestra que la función exponencial descendente tiene una mejor aproximación cuando se utilizan los polinomios de Laguerre. El error de aproximación es mínimo y disminuirá, en la medida en que aumentemos el número de términos en la serie. Por otra parte, estos polinomios mantienen el carácter descendente de la función, lo que no ocu-

re si utilizamos la serie de Taylor. En este caso, la función mantiene la tendencia exponencial, con un error satisfactorio, para un intervalo relativamente pequeño que va de  $t = 0$  a  $t = 1$ . De ahí en adelante la trayectoria comienza a tener una fuerte divergencia con respecto a la función original.

Un análisis similar es posible hacerlo, para comparar el resultado que se obtiene cuando se utilizan polinomios de Hermit y de Chebychev. Para lograr buenas aproximaciones y calcular el error promedio en cada caso, se recomienda hacer uso de alguna herramienta informática que nos facilite la realización de cálculos matemáticos y la graficación de las distintas trayectorias evaluadas.

## CONSIDERACIONES FINALES

Es importante aclarar que para valores altos de  $t$ , la aproximación de la función por medio de los polinomios de Hermit es mejor que si se utilizaran las series de Taylor. En caso de que la variable  $t$  tome valores pequeños, la serie tiene preferencia.

La razón de esta característica es que los polinomios de Hermit utilizan en calidad de función de peso la expresión  $e^{-t^2}$ , mientras que las series de Taylor se basan en la función impulso  $\delta(t)$ .

La función  $e^{-t^2}$  en los polinomios de Hermit garantiza una mayor precisión para los valores tiempo cercanos a  $t = 0$  que la que garantiza la función  $e^{-t}$  en las series de Laguerre.

Para el caso de los polinomios de Chebychev podemos concluir que estos se determinan a partir de la mejor aproximación que se logre, lo cual hace tender el error cuadrático integral a su mínimo valor. Además, pueden minimizarse las desviaciones máximas que sufre la suma  $S_n(t)$  con respecto a los valores reales de la función  $x(t)$ .

El error máximo  $|x(t) - S_n(t)|$  posee un mínimo en el intervalo  $-1 < t < 1$  si:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n A_k \cdot T_k(t)$$

Donde:

$T_k(t)$  - representa los primeros  $(n+1)$  polinomios secuenciales de Chebychev.

$A_k$  - coeficientes de Chebychev que corresponden a los  $T_k(t)$  hallados.

La anterior propiedad, además de satisfacer el criterio del mínimo error cuadrático promedio, permite minimizar las posibles desviaciones de los valores reales con relación a las predicciones hechas.

## REFERENCIAS

Diebold, F. (1999) *Elementos de pronósticos*. 1 ed. México: International Thomson Editores. 350 p.

Ibajchenko, A.G. (1971) *Predicción de procesos aleatorios*. 2 ed. Kiev: Naukova Dumka. 415 p.

Leithold, L. (1973) *El Cálculo con Geometría Analítica*. 2 ed. México: Harper & Row Latinoamericana. 1014 p.

Stewart, J. (2002) *Cálculo: Trascendentes tempranas*. 4 ed. México: Thomson Learning. 1151 p.

Wyatt, J.K. (1959) *Prediction by computer*. 3 ed. Nueva York: Data Process. 313 p.