El papel de las calculadoras graficadoras como instrumento mediador en la comunicación matemática

The Role of Graphing Calculators as a Mediating Tool in Mathematical Communication

Miryam Trujillo Cedeño*
Nivia Marina Castro**

RESUMEN

La comunicación en el aula desempeña un papel fundamental en los resultados académicos y, por tanto, en la calidad de la educación. Uno de los aspectos que inciden en la comunicación matemática en particular es el uso de elementos mediadores como las NTIC (nuevas tecnologías de la información y la comunicación). La riqueza del uso de estas nuevas tecnologías radica en el hecho de poder presentar, a través de ellas, algunos conceptos matemáticos en distintos sistemas de representación y en diferentes contextos lo que permite mejorar la comprensión de dichos conceptos ya que es posible revalidar los esquemas conceptuales que traen los estudiantes al ponerlos en conflicto frente a nuevas situaciones.

Palabras clave: comunicación, comunicación matemática, calculadoras graficadoras, mediadores.

ABSTRACT

The communication in the classroom plays an important role in academic results and, consequently, in the quality of education. One of the aspects that particularly affect mathematical communication is the use of mediating elements such as the NTIC (New Technologies of Information and Communication). The advantage of using these new technologies is that they make it possible to present certain mathematical concepts in different representation systems and contexts, thus allowing students to better understand them, as they can revalidate their conceptual schema when facing new situations.

Keywords: communication, mathematical communication, graphing calculator, mediators.

FECHA DE ENVÍO: 23 DE AGOSTO DE 2010 • FECHA DE ACEPTACIÓN: 18 DE OCTUBRE DE 2010

* Profesora, Departamento Ciencias Básicas, Universidad de La Salle; Investigadora, Centro de Investigación en Educación y Pedagogía (CIEP) e integrante grupo de investigación: Comunicación y aprendizaje. Correo electrónico: mtrujillo@unisalle.edu.co.

** Profesora, Departamento Ciencias Básicas, Universidad de La Salle; Investigadora, Centro de investigación en Educación y Pedagogía (CIEP) e integrante, Grupo de investigación: Comunicación y aprendizaje. Correo electrónico: mcastro@unisalle.edu.co.

Introducción

El buen uso de los elementos mediadores en el proceso enseñanza-aprendizaje —entre los que se cuentan la comunicación y las ayudas tecnológicas— incide positivamente en los resultados académicos de los estudiantes en los distintos niveles de educación. Ésta será una afirmación por confirmar en la investigación titulada *La comunicación de los docentes en los colegios que obtuvieron los mejores resultados en las pruebas Saber de los años 2006 y 2008 en el grado quinto de ciclo inicial de las Instituciones Educativas de carácter oficial de la ciudad de Bogotá*, que se está realizando por parte de un grupo de profesores del Centro de Investigación en Educación y Pedagogía (CIEP), de la universidad de La Salle de Bogotá. Como objetivo general de esta investigación, se propone caracterizar la comunicación de los docentes en quinto grado del ciclo inicial en instituciones educativas de carácter público de la ciudad de Bogotá que obtuvieron los mejores resultados en las Pruebas Saber en los años 2006 y 2008.

El equipo de investigación está conformado tanto por docentes del área de ciencias básicas (Miryam Trujillo, Nivia Marina Castro y Joaquín Restrepo) como del área de Pedagogía y lenguas inglesa francesa y española (Adriana Gordillo, Aurora Cardona, Catalina Jaramillo, Floralba Angulo, Guillermo Hernández y Jairo Alberto Galindo). Además colabora en la investigación un semillero conformado por un grupo de profesores en formación quienes se enriquecerán en su proceso profesional e investigativo. Los grupos de investigación a los cuales pertenecen los profesores y estudiantes del equipo de investigación son *Matestasis, Reprale* y *Aprendizaje, Didáctica y Transformación*.

Siendo la competencia matemática una de las que influye en los resultados en las pruebas Saber, se pretende —como uno de los objetivos específicos de la investigación— identificar las características de una buena comunicación matemática de los docentes en el aula que podrá conducir a una propuesta didáctica que incida positivamente en los resultados de la prueba. A manera de ejemplo se presentan en este artículo situaciones que reflejan el hecho que el buen uso de herramientas tecnológicas como mediadoras en la aprehensión de conceptos matemáticos, contribuye al mejoramiento de la comunicación matemática de los profesores en el aula.

Las ideas que se pretenden desarrollar en el presente artículo están relacionadas con la comunicación en el aula, comunicación matemática y el uso de las calculadoras graficadoras como mediadoras en dicha comunicación matemática.

Comunicación en el aula

La comunicación en el aula entendida, según Charles (1988), como el conjunto de los procesos de intercambio de información entre el profesor y el alumno, y entre los compañeros entre sí, con el fin de llevar a cabo dos objetivos: la relación personal y el proceso de enseñanza aprendizaje, no es sólo el simple intercambio de palabras entre personas sino la manera de expresarlas y la forma de dirigir el mensaje. En esta medida, los comportamientos no verbales desempeñan un papel fundamental en la comunicación en el aula.

Para una mayor efectividad en el proceso comunicativo en la construcción de conocimiento, resulta importante tener en cuenta la mediación pedagógica entendida como "toda mediación capaz de promover y acompañar el aprendizaje de nuestros interlocutores, es decir, de promover en los educandos la tarea de construirse y de apropiarse del mundo y de sí mismos" (Prieto y Gutiérrez, 1996). En la mediación pedagógica intervienen múltiples relaciones simbólicas que suceden entre maestro-estudiante y saber. Una de estas relaciones, las nuevas tecnologías contribuyen a hacer más efectiva la comunicación en la construcción de conocimientos, a la formación integral de los estudiantes y a una educación de calidad.

Comunicación matemática

En relación con la comunicación en matemáticas, Rico et ál. (1997), afirman que "La comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita, se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos".

En la comunicación de los objetos matemáticos existen dificultades como la falta de precisión en el uso del lenguaje corriente al querer dar significado a los signos matemáticos, que en sí mismos no comunican significados a no ser por la interpretación exacta que se haga de ellos.

Otra dificultad es la confusión semántica que ocurre al emplear palabras que pueden tener diferente significado en el lenguaje habitual y en el lenguaje matemático. Por ejemplo, las palabras: semejanza, cada uno, todos, impar, entre otros.

También puede haber confusión de conceptos al usar términos del lenguaje habitual para atraer la atención sobre un signo. Por ejemplo: Agregar un cero y dividir por dos en la multiplicación por cinco: 45*5 = 450/2. En este caso, se opaca el concepto de multiplicación al remplazarlo por el algoritmo.

En relación con los objetos matemáticos se presenta la falta de sentido de éstos. Esto se evidencia al preguntarles a los estudiantes por el valor de verdad de la proposición $\sqrt{x^2+4} = x + 2; x \in R$.

A pesar de demostrar con contraejemplos numéricos que $\sqrt{x^2+4} \neq x + 2$, el error persiste en los estudiantes. De acuerdo con Rico et ál. (1997), "Parece razonable pensar que la falta de sentido se recupera poniendo a los alumnos en una situación de conflicto que genere esquemas que doten de sentido al concepto o proceso erróneo que presentan y que estas situaciones son variadas, y van desde considerar un ejemplo numérico o más simple, hasta usar diferentes contextos o sistemas de representación que pongan en evidencia que existe un defecto en la comprensión del concepto o en el procedimiento de la actuación del alumno".

Una de las distintas situaciones que se le pueden presentar al estudiante para darles sentido a los objetos matemáticos y específicamente con la proposición $\sqrt{x^2+4} = x + 2; x \in R$, se presentará más adelante en forma gráfica con la mediación de la calculadora graficadora.

La calculadora como mediadora en la comunicación matemática

La teoría de la mediación instrumental está reconocida en la actualidad por las teorías de cognición de mayor impacto en los contextos educativos. El principio de mediación instrumental expresa que todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico; ha recibido una atención creciente en los últimos años debido a la utilización de ayudas computacionales en la educación, como mediadora de las actividades cognitivas orientadas al aprendizaje.

La mediación instrumental, en efecto, comienza desde el momento en que podemos redefinir los objetivos matemáticos en términos de las construcciones ejecutables. En la actualidad, los instrumentos computacionales encarnan sistemas de representación que presentan características novedosas: son sistemas ejecutables de representación que virtualmente ejecutan funciones cognitivas que anteriormente eran privativas de los seres humanos:

> Estos nuevos sistemas de representación permiten al estudiante expresar un problema en diversos enfoques cognitivos de tal forma que está en capacidad de interpretar los resultados del tratamiento que se le de [sic] a tales sistemas mediante el instrumento de que disponga. Los nuevos sistemas de representación hacen posible también un campo de experiencia que no estaba antes a disposición del estudiante. (Memorias Seminario Nacional de Formación de Docentes 2002, pp. 58-59)

Los sistemas de representación no sólo sirven para registrar datos sino para ampliar la capacidad de procesamiento de la mente humana. Al instalarlos en soportes ejecutables potenciamos la capacidad de procesamiento a nuestra disposición. Estos sistemas se pueden imaginar como una herramienta de mediación. En sus versiones informáticas, la forma de representación tiene la característica de ejecutable; es decir, una vez instalados en el lenguaje del entorno computacional, las nuevas representaciones son procesables y manipulables.

Cuando un estudiante se auxilia de una calculadora para realizar ciertos cálculos dentro de un problema cuya solución ya ha encontrado, esa calculadora puede interpretarse como un auxiliar de su cognición. En ese caso, se podría decir que la calculadora es una herramienta, pues su auxilio es complementario al proceso de pensamiento del estudiante. En estas condiciones, la herramienta no modifica sino que complementa el pensamiento del estudiante. Podría decirse que la calculadora es una herramienta cuando genera tan sólo efectos de amplificación. Si el uso sostenido de la herramienta desemboca en cambios que afectan las estrategias de solución de problemas y la manera misma como se plantean dichos problemas, puede ocurrir que el pensamiento matemático del estudiante quede afectado radicalmente por la presencia de la herramienta; en este caso, la herramienta se convierte en un instrumento didáctico, ya que tiene efectos de reorganización conceptual.

Este hecho se evidencia por ejemplo en la presentación de situaciones en forma dinámica y en la solución de ecuaciones en forma gráfica. En la proyección de situaciones en forma dinámica, la calculadora actúa como un instrumento eficaz en la medida en que permite visualizar situaciones físicas o geométricas, identificar más claramente las magnitudes que cambian y las que permanecen constantes e identificar la(s) variable(s) independiente(s) y las variable(s) dependiente(s), como al proyectar el triángulo isósceles de la figura 1, con el vértice c móvil, se puede evidenciar que a medida que la base AC cambia, las medidas de los lados AB y BC permanecen iguales y constantes (figuras 2 y 3), contrario a lo que los estudiantes, en muchas ocasiones, afirman: que las medidas de los lados son iguales pero que varían cuando la base varía.

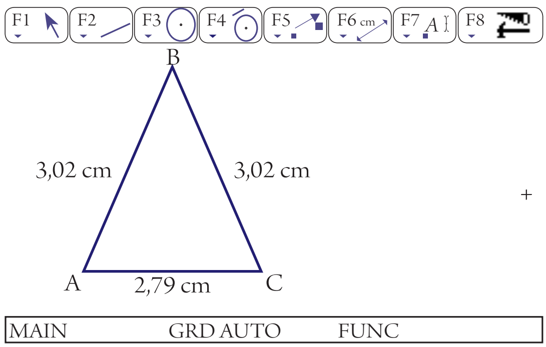

Figura 1. **Triángulo isósceles dinámico**

Fuente: las autoras.

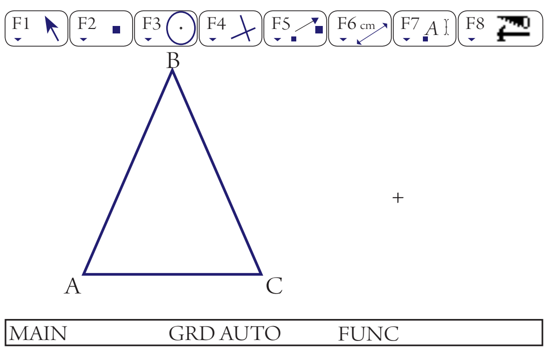

Figura 2. **Triángulo instante uno**

Fuente: las autoras.

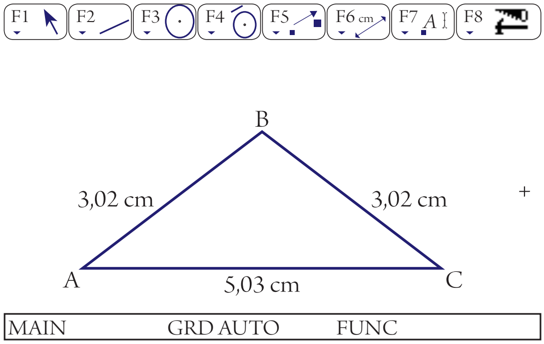

Figura 3. **Triángulo instante dos**

Fuente: las autoras.

En esta medida, la calculadora hace un valioso aporte en cuanto genera en el estudiante un conflicto al mostrarle que, contrario a lo que ellos piensan, al variar la longitud de la base, las longitudes de los otros dos lados no lo hacen. Podría pensarse que este conflicto conduce a revalidar los esquemas conceptuales[1] que traían los estudiantes como son:

1. Las medidas de los lados de un triángulo varían cuando cambia la medida de uno de ellos.

2. Al cambiar la medida de uno de los lados del triángulo, la clase de triángulo, según sus lados, puede cambiar.

La ganancia de la revalidación de los esquemas conceptuales de los estudiantes está en el cambio conceptual acerca de cantidades que cambian, cantidades que no cambian y la relación entre una cantidad y otra.

Otro aspecto en el que se evidencia la eficacia de la calculadora graficadora es al determinar el conjunto solución de ecuaciones e inecuaciones, con la ayuda del

[1] Aquí se entiende por esquema una estructura de conocimiento sobre algún tema o más técnicamente como una respuesta general utilizada para resolver una situación particular. El esquema conceptual tiene su origen en un esquema operatorio que se caracteriza por ser una acción o conducta, que apunta hacia un fin, interiorizada y reversible, agrupada en un sistema de conjunto, con leyes de composición en cuanto sistemas o totalidades. (*Matemática educativa; Fundamentos de la matemática universitaria. Comprensión y pensamiento Matemático Avanzado* (Delgado García, 2003, pp. 14-15).

programa graficador que ésta contiene. Por ejemplo, cuando al estudiante se le pregunta por el valor de verdad de la proposición:

$$\sqrt{a^2+b^2}=a+b\ ;\ \ a,b\in R$$

es muy frecuente encontrar como respuesta que la proposición es verdadera, dando justificaciones incorrectas, tales como:

1. "Porque $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=a+b$.
2. "Porque $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+b)^2}=a+b$.
3. "Porque $\sqrt{a^2+b^2}=(a^2+b^2)^{1/2}=(a^2)^{1/2}+(b^2)^{1/2}=a+b$.
4. "Porque $\sqrt{a^2+b^2}=((a+b)^2)^{1/2}=a+b$.
5. "Porque si $a=0$ y $b=2$ se cumple la proposición".

En la primera y en la tercera "justificación", se observa que se activa el esquema conceptual de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición en los reales, extendiéndola a la radicación y la potenciación respecto de la adición. En la segunda y cuarta opción, se activa el esquema conceptual relativo a la potencia de un producto, extendiéndola a la potencia de una suma. Para la última "justificación", opta por dar ejemplos particulares en los que se cumple la proposición, activándose el esquema conceptual de demostrar con un ejemplo una proposición verdadera, como si se tratara de refutar con un contraejemplo una proposición falsa; además, en este caso, se hace mal uso del cuantificador universal (para cada *a* y *b* real) asumiéndolo como existencial (para algunos *a* y *b* reales).

Con el fin de revalidar estos esquemas conceptuales, que se manifiestan con frecuencia en los estudiantes, se sugiere resolver ecuaciones e inecuaciones mediante representaciones gráficas como lo muestran los siguientes ejemplos en los cuales se pide al estudiante resolver una pregunta usando papel y lápiz para que luego confronte sus respuestas usando la calculadora graficadora. En el primer ejemplo la pregunta es:

i. Para cada proposición marque verdadero (V) o falso (F), *justificando* su respuesta:

$\sqrt{x^2+4} = x+2;\ x \in R$ (V) (F) Puesto que:

Ahora, usando la calculadora graficadora,

ii. Grafique las funciones $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ y $g(x) = x + 2$, en la misma pantalla; para eso use la ventana [-10,10] x [-10,10] y responda las siguientes preguntas: ¿Coinciden las dos gráficas en todos los puntos? ¿Para qué valores de x se tiene que $f(x) = g(x)$? Si coinciden en un solo punto, ¿se puede afirmar que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in R$? Compare esta respuesta con la dada en *i.* Escriba un comentario del resultado de tal comparación.

Cuando el estudiante realiza las gráficas de las funciones en una misma pantalla, puede observar que en ellas se evidencia el hecho que las funciones no coinciden en todos los valores de x y que, por tanto, no es cierto que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in R$. También, si se desea obtener el punto de intersección entre las dos gráficas, con el uso de la calculadora se obtiene el punto (0,2), mostrándose así que $f(x) = g(x)$ para $x + 0$.

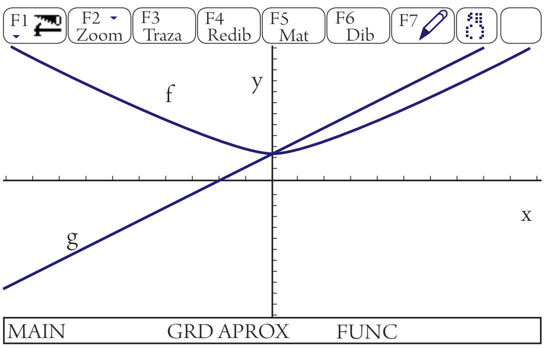

Figura 4. **Gráficas de las funciones** $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ y $g(x)=x+2$

Fuente: las autoras.

En el segundo ejemplo, la pregunta es:

i. Para cada proposición marque verdadero (V) o falso (F), justificando su respuesta:

$1/2^x > 1 \Rightarrow 2^x < 1,$ $x \in R$ (V) (F) Puesto que:

Ahora, usando la calculadora graficadora,

ii. Grafique las funciones $f(x) = 1/2^x$ y $g(x) = 1$. ¿Para qué intervalo se cumple que $f(x) > g(x)$?

iii. Grafique ahora $h(x) = 2^x$ y $g(x) = 1$, en la misma pantalla. Use las ventanas $[-5,5]$ x $[-1,5]$. ¿Para qué intervalo se cumple que $h(x) < g(x)$?

Con base en este análisis, verifique su respuesta del ítem *i*. Escriba un comentario del resultado de tal verificación.

Al graficar las funciones $f(x) = 1/2^x$ y $g(x) = 1$, se observa que $f(x)$ no siempre es mayor que $g(x)$ y que la desigualdad $f(x) > g(x)$ se cumple sólo si $x \in (-\infty,0)$.

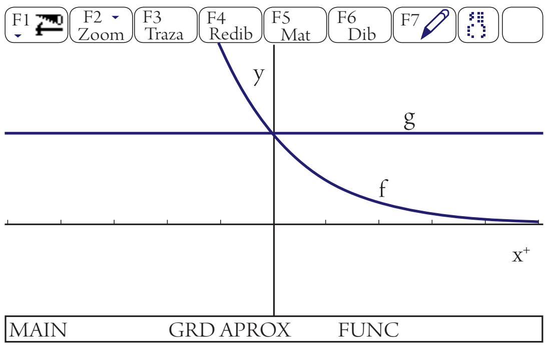

Figura 5. **Gráficas de las funciones $f(x) = 1/2^x$ y $g(x) = 1$**

Fuente: las autoras.

Ahora, al graficar las funciones $h(x) = 2^x$ y $g(x) = 1$, se observa que no siempre $h(x)$ es menor que $g(x)$ y la desigualdad $h(x) < g(x)$ se cumple sólo si $x \in (-\infty,0)$. Otro hecho importante de observar es que en el intervalo donde $f(x) > g(x)$, se tiene que $h(x) < g(x)$ lo que indica que la proposición: $1/2^x > 1 \Rightarrow 2^x < 1, x \in$ R es verdadera.

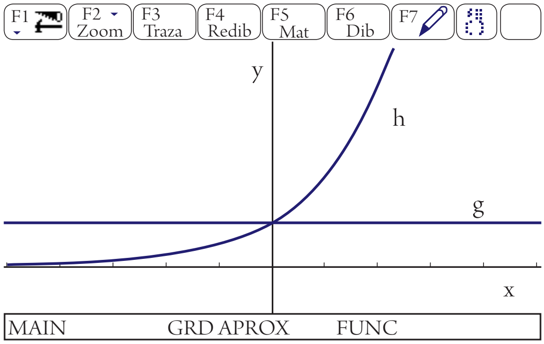

Figura 6. **Gráficas de las funciones $h(x) = 2^x$ y $g(x) = 1$**

Fuente: las autoras.

Comentario. Observe que 2^x es el recíproco de $1/2^x$ y además 2^x es positivo para todo valor de la variable *x*, razón suficiente para afirmar que el ítem *i* es verdadero. Éste es un ejemplo donde se evidencian las propiedades de las desigualdades:

Si $0< a < b \Longrightarrow 1/a > 1/b$ y Si $c > 0$ y $a > b \Longrightarrow ac > bc$

Lo anterior confirma el hecho que la calculadora graficadora reorganiza el funcionamiento cognitivo del estudiante (Castro, Trujillo y Guerrero, 2005). Es importante observar que estos instrumentos tecnológicos:

> […] se pueden ver como *amplificadores* o *mediadores* de la acción. En el primer caso, el apoyo a los procesos mentales es *cuantitativo*: se hace, mejor, más rápido, más eficaz, lo que se hacía sin las NTIC; la subjetividad que se despliega es independiente de la herramienta y el funcionamiento mental permanece idéntico. En el segundo, la novedad de las NTIC es *cualitativa*: la herramienta afecta los procesos cognitivos ampliando su dominio y generando nuevas formas de procesamiento mental, la subjetividad que se genera está en relación con el mediador. (Delgado, 2004, s. p.)

Así, promueve el intercambio de ideas, generándose discusiones plenarias, con lo que se logra un aprendizaje colaborativo del que tratan los postulados del constructivismo, según los cuales el papel de la educación consiste en mostrar a los estudiantes cómo construir conocimientos a través de la colaboración con otros, permitiendo mostrar diferentes perspectivas para abordar un determinado problema y llegar a escoger una solución propia, al mismo tiempo que se perciben otros puntos de vista con los que se puede estar en desacuerdo (Gros, 1997).

En efecto, con el uso de la calculadora graficadora se pueden generar ambientes y actividades de aprendizaje, entendidos éstos como las circunstancias que se disponen (entorno físico y psicológico, recursos, restricciones) y las estrategias que se usan, para promover que el aprendiz cumpla con su misión, es decir, que logre aprender. Sin embargo, el ambiente de aprendizaje no es lo que hace que el estudiante aprenda. Es condición necesaria pero no suficiente. La actividad del aprendiz en el proceso de aprendizaje es la que permite aprender. Un ambiente de aprendizaje puede ser muy rico, pero si el aprendiz no lleva a cabo actividades que aprovechen su potencial, de nada sirve.

Conclusiones

Los procesos de comunicación en el aula pueden ser influenciados por los comportamientos no verbales tales como los gestos, la forma de transmitir el mensaje, la manera de expresar las palabras, la actitud de los interlocutores, entre otros factores.

Entonces, queda por confirmar que la buena comunicación de los docentes en el aula incide en los resultados académicos de los estudiantes y que esto a su vez será un factor determinante en la calidad de la educación. Por ello, en la comunicación matemática se pueden presentar dificultades que repercuten en la apropiación de los conceptos matemáticos relacionadas con: la falta de precisión en el uso del lenguaje corriente, confusión semántica, confusión de conceptos al usar términos del lenguaje habitual para atraer la atención sobre un signo, falta de sentido de los objetos matemáticos, entre otras razones. Así, la comunicación matemática en particular se podrá mejorar mediante la implementación de las *nuevas tecnologías de la información y la comunicación* (NTIC), entendidas como auxiliares de cognición que, asimismo, tiene efectos de reorganización conceptual, por lo cual se consideran instrumentos didácticos de gran ayuda en la comunicación matemática en el aula.

Referencias

Castro, N.; Trujillo, M. y Guerrero, J. (2005). El impacto de la calculadora graficadora como instrumento didáctico en el aprendizaje del concepto de función real en cálculo diferencial. *Revista de Investigación*, 66.

Charles Creel, M. (1988). El salón de clases desde el punto de vista de la comunicación. En: *Perfiles Educativos*, 39, 36-46.

Delgado, C. (2003). *Comprensión y pensamiento matemático avanzado. Matemática Educativa: fundamentos de la matemática universitaria*. Bogotá, Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería.

Delgado, C. (2004). Nuevas tecnologías y zona de desarrollo próximo. En: *Matemática educativa: Fundamentos de la matemática universitaria* (pp. 87-98). Bogotá: Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería.

Gros, B. (1997). *Diseños y programas educativos*. Madrid: Ariel.

Gutiérrez, F. y Prieto, D. (1996). *Mediación pedagógica*. Ciudad de Guatemala: Universidad de San Carlos de Guatemala.

Ministerio de Educación Nacional (2002). Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas. *Proyecto incorporación de Nuevas Tecnologías al currículo de Matemáticas de la educación media de Colombia*. Bogotá: MEN.

Rico, L. et ál. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Universidad de Barcelona. Barcelona: Horsori.