

# Simulación de bandas de corte en materiales granulares empleando discontinuidades débiles en un modelo constitutivo hipoplástico

## *Simulation of Shear Bands in Granular Material Using Weak Discontinuities in a Hypoplastic Constitutive Model*

DANIEL FELIPE CASTILLA DÍAZ\*

ARCESIO LIZCANO PELÁEZ\*\*

### RESUMEN

El artículo presenta la simulación de la formación de bandas de corte en suelos granulares al emplear el concepto de discontinuidades débiles de la mecánica de fracturas. Por lo que fue extendido un modelo constitutivo hipoplástico para capturar las deformaciones adicionales en la banda de corte. Una vez extendido, el modelo fue implementado en una subrutina de usuario (UMAT) para ABAQUS. El comportamiento del suelo antes y después de la localización de las deformaciones es separado mediante el criterio de bifurcación. El artículo expone los resultados de las simulaciones de element test al utilizar el modelo hipoplástico extendido y el programa Incremental Driver desarrollado por Niemunis (2007). Los resultados de estas simulaciones son comparados con simulaciones realizadas con el modelo hipoplástico de referencia. Estas comparaciones permitieron concluir que el modelo constitutivo hipoplástico extendido permite reproducir de una manera realista y sencilla la formación de bandas de corte en medios granulares.

**Palabras clave:** hipoplasticidad, localización, bifurcación, discontinuidades débiles, UMAT.

### ABSTRACT

The paper presents the simulation of the creation of shear bands in granular soils by using the concept of weak discontinuities in fracture mechanics. As a result, a hypoplastic constitutive model was extended to capture the additional strain on the shear band. Once extended, the model was implemented in a user subroutine (UMAT) for ABAQUS. Soil behavior before and after the localization of the deformation is separated through the bifurcation criterion. The article presents the results of the element test simulations using the extended hypoplastic model and the Incremental Driver program developed by Niemunis (2007). The results of these simulations are compared to simulations performed with the reference hypoplastic model. These comparisons led to the conclusion that the extended hypoplastic constitutive model reproduces in a realistic and simple way the formation of shear bands in granular media.

**Keywords:** Hypoplasticity, localization, bifurcation, weak discontinuities, UMAT.

FECHA DE ENVÍO: 10 DE SEPTIEMBRE DE 2011 • FECHA DE ACEPTACIÓN: 7 DE NOVIEMBRE DE 2011

\*Ingeniero Civil y magíster en Ingeniería Civil, Universidad de los Andes. Correo electrónico: daniel\_felipe@hotmail.com.

\*\*Ingeniero Civil, Universidad del Cauca, Ph.D Ingeniería Geotécnica, Universität Karlsruhe.

## Introducción

Para describir el comportamiento numérico de la banda de corte se ha desarrollado varios métodos, por ejemplo como se ve en Tejchman (2008), o gradientes de deformación de orden superior, como se puede observar en Wu (2008). Pero estos métodos tienen una alta complejidad matemática y una dificultad para ser implementados computacionalmente. Es por esto que una metodología más simple es necesaria. La teoría de discontinuidades débiles de la mecánica de fracturas es una herramienta que presenta una complejidad numérica mucho menor y es de fácil implementación en una subrutina de cálculo UMAT. La banda de corte se define como una zona en un cuerpo en el que se localizan las deformaciones, y su estudio es importante en la ingeniería de suelos, en casos de análisis común como la estabilidad de taludes.

## Modelo hipoplástico

### *Ecuación hipoplástica*

El modelo hipoplástico es un modelo constitutivo desarrollado originalmente para materiales granulares y es planteado de forma incremental, es decir, en términos de las tasas de esfuerzos y deformaciones. Adicionalmente, el modelo está planteado en términos del tensor de tasa de esfuerzo objetivo de Zaremba-Jaumann (ecuación 1).

$$\dot{T} = C^{hyp} : D \quad (1)$$

La ecuación hipoplástica debe satisfacer tres propiedades del material que fueron observadas experimentalmente. La primera es la independencia del modelo de la tasa de deformación que significa que no hay efectos viscosos importantes; la segunda es la proporcionalidad en trayectorias de esfuerzo y deformación (Goldscheider, 1982); y la tercera es el comportamiento diferente a carga y descarga. La ecuación 2, propuesta por Kolymbas y Wu (1990) y Wu (1992), satisface las tres propiedades enunciadas.

$$\dot{T} = L : D + \|D\| \quad (2)$$

La primera parte de la ecuación es un tensor lineal hipoelástico  $L$  de cuarto orden, mientras que la segunda parte representa un tensor de rigidez no lineal de segundo orden  $N$ .  $|D|$  es la norma euclidiana del tensor tasa de deformación. El modelo hipoplástico de von Wolffersdorff (1996) es una extensión del modelo original, que incluye la relación de vacíos como una variable de estado, como se puede ver en la ecuación 3:

$$\dot{e} = (1 + e)tr [D] \quad (3)$$

Adicionalmente incluye la ley de compresión de Bauer, presentada en la ecuación 4, que es la representación matemática de un comportamiento observado experimentalmente, que muestra que no hay una relación de vacíos única para el material en un estado de esfuerzos dado. Von Wolffersdorff también incluye en el modelo la superficie límite de Matsuoka-Nakai (1977).

$$\frac{e_i}{e_{i0}} = \frac{e_c}{e_{c0}} = \frac{e_d}{e_{d0}} = \exp(-(3p) / h_s)^n \quad (4)$$

Se utiliza el modelo hipoplástico de von Wolffersdorff, dado que este se desarrolló específicamente para materiales granulares, a diferencia de modelos elastoplásticos clásicos como CAMCLAY, creados para suelos cohesivos. Asimismo, y a diferencia de los modelos clásicos elastoplásticos, las deformaciones elásticas y plásticas no se encuentran separadas en el planteamiento de la ecuación constitutiva, lo que permite una mayor facilidad al realizar la implementación computacional del modelo con una condición adicional, como son las deformaciones adicionales generadas al interior de la banda de corte.

### **Parámetros del modelo**

El modelo hipoplástico de von Wolffersdorff tiene ocho parámetros del material, que se suponen constantes y que pueden ser determinados en ensayos de laboratorio estándar. La tabla 1 presenta los parámetros del modelo y una breve descripción de cada uno.

a

Tabla 1. Parámetros del modelo hipoplástico

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN
$\varphi_c$	Ángulo de fricción crítico
$h_s$	Dureza granular
$n$	Exponente de la ley de compresión
$\alpha$	Exponente relacionado con el ángulo de fricción pico
$\beta$	Exponente relacionado con la dependencia del estado de esfuerzos
$e_{i0}$	Relación de vacíos máxima de referencia
$e_{d0}$	Relación de vacíos mínima de referencia
$e_{c0}$	Relación de vacíos crítica de referencia

Fuente: Arias (2006).

### Implementación numérica

Para poder obtener la respuesta del suelo, utilizando un modelo constitutivo hipoplástico, se debe realizar una implementación numérica. Esta implementación se realizó por medio de una subrutina de cálculo llamada UMAT o *User-defined mechanical material behavior* en el *software* comercial para el análisis con el método de elementos finitos ABAQUS. El *software* utilizado para la integración del modelo fue el *Incremental Driver*, desarrollado por Niemunis (2007).

En este sentido, para poder realizar la implementación del modelo en una UMAT se debe obtener el jacobiano u operador tangente consistente. Como el modelo está planteado de forma incremental, es necesario integrarlo para obtener los esfuerzos y deformaciones, por tanto, se utilizó la metodología presentada por Fellin (2003), en la que se realiza una integración explícita del jacobiano, como se presenta en la ecuación 5:

$$\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \Sigma} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial T}{\partial D} (\Delta t) \quad (5)$$

### Bifurcación

Bifurcación es un concepto teórico que representa el instante en el que se inicia la localización de las deformaciones. Este fenómeno ocurre cuando el campo escalar de velocidades en un cuerpo presenta una discontinuidad, es decir, es diferente de cero, y se presenta un salto (ecuación 6).

$$\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0 \quad (6)$$

De este modo, al utilizar la condición de compatibilidad de Maxwell para gradientes de deformación, se obtiene una ecuación que caracteriza el salto en el campo de velocidades (ecuación 7).

$$\left[ \left[ \frac{\delta v}{\delta x} \right] \right] = g \otimes n \quad (7)$$

Este salto está caracterizado por un vector  $n$ , normal al plano de discontinuidad, y un vector  $g$ , que es una representación de la velocidad relativa entre los dos cuerpos separados por la discontinuidad. Cuando el vector  $g$  es igual a cero, quiere decir que no hay movimiento relativo entre los cuerpos, y por tanto, no hay una discontinuidad en el campo de velocidades. Cuando el vector  $g$  es diferente de cero, se puede obtener el salto en la tasa de deformaciones, que corresponde a la parte simétrica del salto en el campo de velocidades (ecuación 8).

$$[[D]]_{\Sigma} = \frac{1}{2}(gn + ng) \quad (8)$$

A partir de la metodología propuesta por Niemunis (2003), en su disertación doctoral, se puede realizar la implementación del criterio de bifurcación aplicado específicamente a hipoplasticidad. Así, con las simulaciones es posible obtener el instante en el que ocurre la bifurcación y, adicionalmente, la inclinación de la banda de corte.

### ***Discontinuidades débiles***

La banda de corte es una zona del material en donde el comportamiento es diferente. Ocurren deformaciones adicionales que modelos macroscópicos, como por ejemplo hipoplasticidad, no son capaces de reproducir debido a la suposición de campos promedio de tasas de deformación. Al emplear el concepto de mecánica, de fracturas de discontinuidades débiles y fuertes, se puede realizar una aproximación más simple al problema.

La falla de un material se separa en tres fases: falla difusa, que se caracteriza por una zona no definida donde el material falla; discontinuidad débil, en donde en una zona delimitada con un espesor medible el material alcanza la falla; y

discontinuidad fuerte, que representa una fractura en el material, como se observa en la figura 1. Experimentalmente se ha observado que en materiales granulares sin cohesión, no ocurren fracturas, debido a que los granos tienden a ocupar los espacios libres. Se ha encontrado que en este tipo de suelos aparecen discontinuidades débiles o bandas de corte con un espesor medible. Es por esto que para el análisis de banda de corte sólo se utiliza el concepto de discontinuidad débil.

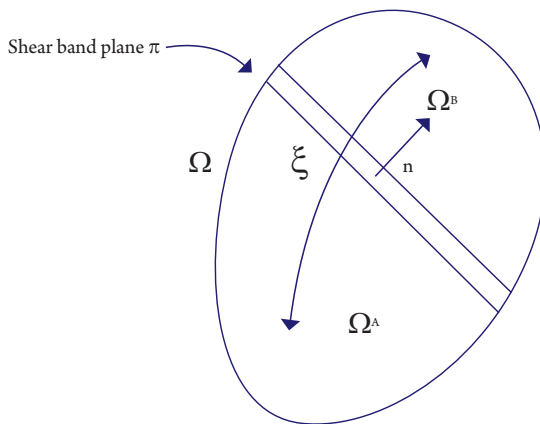


Figura 1. Cuerpo con una discontinuidad débil

Fuente: Castilla (2010).

Si en un dominio  $\Omega$  como se observa en la figura 1, aparece una banda de corte  $\pi$  caracterizada por un vector normal  $n$ ; y se traza una línea de análisis  $\xi$  y se grafica la tasa de deformación  $D$  como se observa en la figura 2, se obtiene que entre las dos zonas hay un salto en la tasa de deformación.

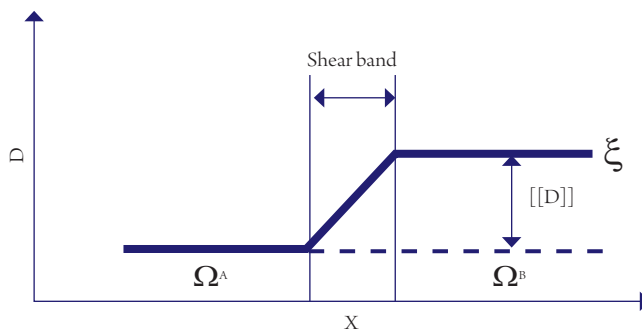


Figura 2. Análisis de la tasa de deformaciones  $D$  a lo largo de una línea  $\xi$

Fuente: Castilla (2010).

En este sentido, la tasa de deformación total para toda la banda de corte correspondería a la suma de la tasa de deformación homogénea o regular y el salto en la tasa de deformación o tasa de deformación singular, como se presenta en las ecuaciones 9 y 10,

$$D_{total} = D_{regular} + D_{singular} \quad (9)$$

$$D_{singular} = [[D]] \quad (10)$$

Si se calcula el salto en la tasa de deformación como se indicó en la ecuación 8, se puede obtener la respuesta del material al interior de la banda de corte, así como la deformación adicional generada.

## Resultados

Los resultados que se presentan a continuación fueron obtenidos a partir de simulaciones realizadas con la UMAT, con la extensión para discontinuidades débiles. El ensayo simulado es un triaxial axisimétrico consolidado y drenado, a diferentes presiones de confinamiento. Los parámetros de los materiales utilizados fueron los obtenidos por Arias (2006) en su tesis de maestría (tabla 2). La relación de vacíos iniciales para los ensayos es de 0,54. Este valor se escogió debido a que en ensayos de laboratorio, con esta relación de vacíos inicial, apareció la banda de corte.

Tabla 2. Parámetros hipoplásticos para la arena del Guamo

PARÁMETRO	VALOR
$\varphi_c$	30°
$e_{i0}$	1,15
$e_{c0}$	1,00
$e_{d0}$	0,52
$h_s$	4000 MPa
$n$	0,27
$\alpha$	0,17
$\beta$	1,00

Fuente: elaboración propia.

En la figura 3 se puede observar que el punto de bifurcación ocurre antes del estado pico, lo que está de acuerdo con la teoría de la bifurcación. Con el incremento de la presión de confinamiento, la bifurcación ocurre a mayor deformación axial. Con la extensión de discontinuidades débiles, se puede inferir que el material al interior de la banda de corte alcanza un estado pico antes que el material con deformación homogénea. Adicionalmente, el estado residual se presenta a un esfuerzo desviador menor. Físicamente esto significaría que el material al interior de la banda de corte falla antes que el resto del material, lo que concuerda con lo observado de modo experimental.

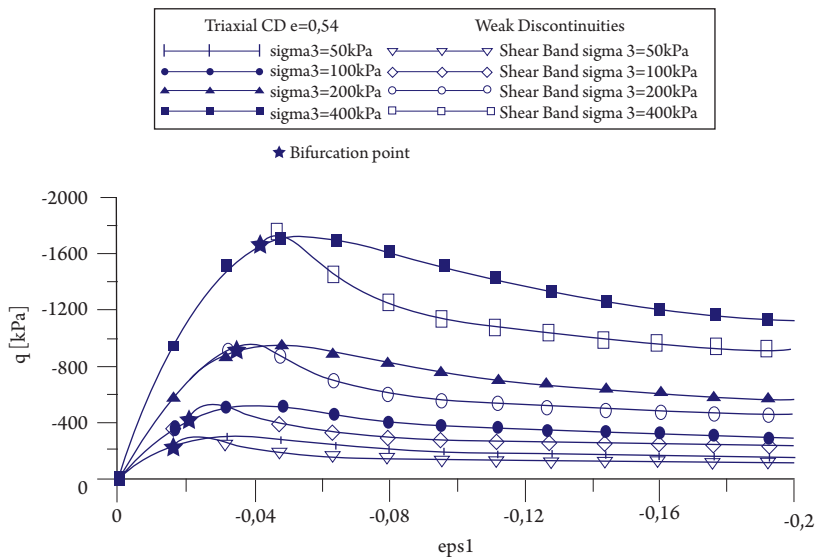


Figura 3. Simulación con la extensión de discontinuidades débiles de un ensayo triaxial CD. Esfuerzo desviador vs. deformación axial

Fuente: Castilla (2010).

Cuando se analiza el cambio de la relación de vacíos con respecto al esfuerzo desviador, como se observa en la figura 4, se encuentra que el material al interior de la banda de corte alcanza una relación de vacíos mayor que el resto del material. El material que se encuentra en la banda de corte alcanza una relación de vacíos cercana a 0,8 en su estado estable, mientras que el material con deformaciones homogéneas se estabiliza en una relación de vacíos aproximadamente de 0,7. Esto concuerda con lo observado de manera experimental por Desrues (2003) al efectuar tomografías computarizadas a muestras probadas en ensayos triaxiales.



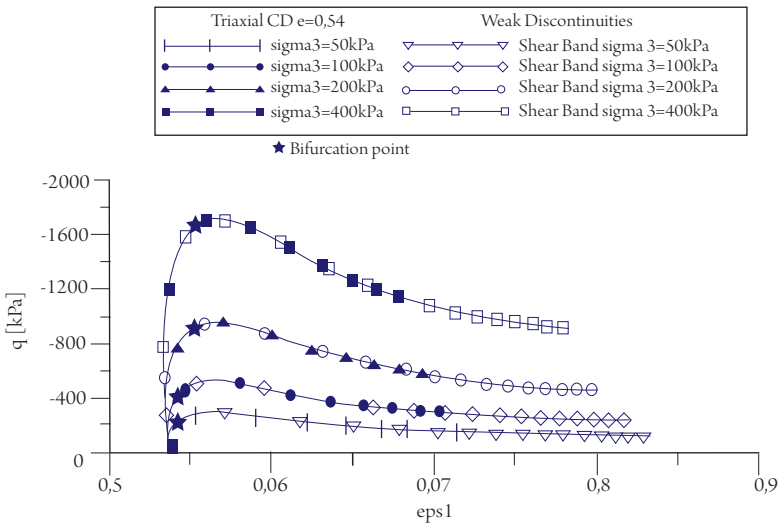


Figura 4. Simulación con la extensión de discontinuidades débiles de un ensayo triaxial CD. Esfuerzo desviador vs. relación de vacíos

Fuente: Castilla (2010).

Al analizar el cambio volumétrico en el material el cambio al interior de la banda de corte, es mayor respecto al resto del material, como se puede apreciar en la figura 5.

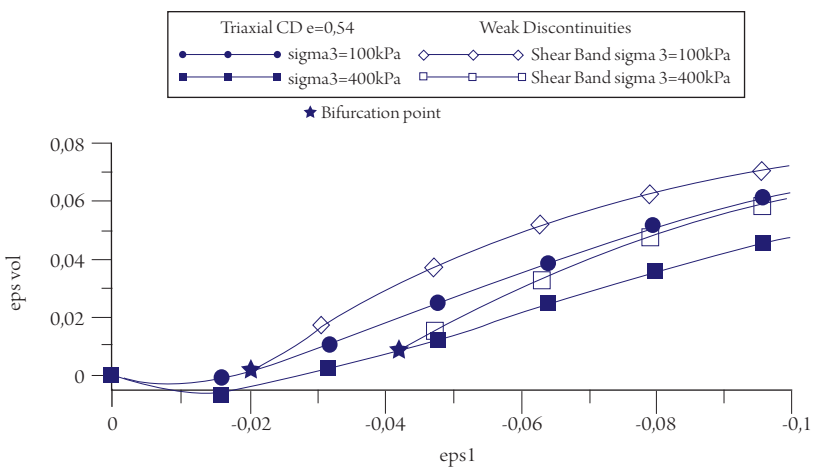


Figura 5. Simulación con la extensión de discontinuidades débiles de un ensayo triaxial CD. Deformación volumétrica vs. deformación axial

Fuente: Castilla (2010).

En la figura 6 se puede observar que la dilatancia del material es mayor cuando está al interior de la banda de corte, pero que con el paso del tiempo el material, adentro como afuera de la banda de corte, llega al mismo estado estable.

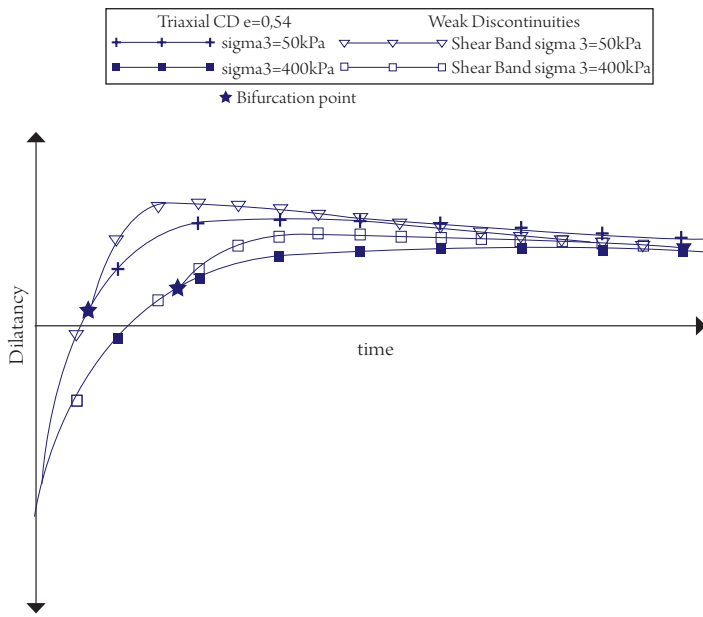


Figura 6. Simulación con la extensión de discontinuidades débiles de un ensayo triaxial CD. Dilatancia vs. tiempo

Fuente: Castilla (2010).

## Conclusiones

El concepto de bifurcación es una singularidad matemática que se asocia con una singularidad espacial —que en este caso es la banda de corte—; se asocia con el momento en el que empieza a ocurrir la localización de las deformaciones. Es importante resaltar que es un concepto puramente teórico y que su validación experimental es altamente compleja debido a la imposibilidad de instrumentar una banda de corte en el momento de su aparición.

Con la extensión de discontinuidades débiles, la complejidad matemática del problema se reduce en gran medida, al comparar con métodos como los gradientes de

deformación de orden superior o el continuo de Cosserat. En este mismo sentido, su implementación en una subrutina de usuario UMAT es fácil de realizar, lo que permite obtener resultados a partir de simulaciones.

Los resultados obtenidos con las simulaciones realizadas con la UMAT, con la extensión para discontinuidades débiles, presentan el comportamiento al interior de la banda de corte. Es decir, no reflejan la respuesta de un cuerpo con una banda de corte en su interior, sino un cuerpo que se encuentra dentro de la singularidad espacial. Es por esto que los resultados deben ser observados desde un punto de vista cualitativo, mas no cuantitativo, pues la validación experimental requeriría la instrumentación de la banda de corte, que como se explicó anteriormente, es algo complejo.

## Referencias

- Arias, P.A. (2006). *Modelo de comportamiento de materiales granulares: estudio y determinación de parámetro* [tesis de maestría]. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Bauer, E. (1999). Analysis of shear band bifurcation with a hypoplastic model for a pressure and density sensitive granular material. *Mechanics of Materials*, 39(9), 597-609.
- Castilla, D. F. (2010). *Shear Band Behavior Simulations in Granular Materials Using Weak Discontinuities in a Hypoplastic Constitutive Model* [tesis de maestría]. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Desrues, J. (2003). Tracking strain localization in geomaterials using computerized tomography. En *Proc. of the International Workshop on X-Ray CT for Geomaterials GeoX*. Kunamoto, Japón. Ed. Balkema.
- Fellin, W. y Ostermann, A. (2003). Consistent tangent operators for constitutive rate models. En *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29(12).
- Huespe, A. y Oliver, J. (2004). Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193(30-32), 3195-3220,
- Niemunis, A. (2003). *Extended Hypoplastic Models for Soils* [disertación doctoral]. Bochum, Alemania: Institute of foundation engineering and soil mechanics.
- Von Wolffersdorff, P. A. (1996). A hypoplastic relation for granular materials with a pre-defined limit state surface. *Mechanics of cohesive-frictional materials*, 1, 251-271.

