

Estudio analítico del estado de esfuerzos en un disco indeformable ante carga diametral

ADOLFO CAMILO TORRES PRADA¹

FABIÁN AUGUSTO LAMUS BÁEZ²

SEBASTIÁN BAHAMÓN BLANCO³

JUAN SEBASTIÁN VESGA MEDINA⁴

RESUMEN

Determinar analíticamente el estado de esfuerzos de especímenes tipo disco sometidos a cargas diametrales es un problema actual de la mecánica de materiales. Estas aproximaciones contribuyen a diseñar de manera acertada nuevos ensayos que permiten caracterizar mecánicamente los materiales, las pruebas necesarias en sectores como la industria del concreto, la mecánica de rocas y de otros materiales de construcción. Una de las últimas propuestas analíticas para la solución del problema se encuentra en el trabajo de Markides, Kourkoulis y Chatzistergos, que muestra un sistema de ecuaciones con el cual obtener la distribución de esfuerzos internos dentro del disco de material indeformable. En el presente artículo se desarrolla un programa de cálculo construido en lenguaje de programación Fortran, a fin de estudiar la variación del estado de esfuerzos dentro del disco a medida que varía la distribución de la carga en el perímetro de la muestra, área relacionada con el ángulo interno ω_0 medido desde el centro del disco y que barre el límite del área de contacto. En particular se busca, mediante esta fase experimental numérica, establecer el rango de valor de ω_0 en el que los esfuerzos del disco presenten un estado de compresión. Los resultados entregan la distribución de los esfuerzos radial σ_r , tangencial $\sigma_{\theta\theta}$ y cortante $\tau_{r\theta}$ para el caso geométrico establecido en la presente investigación, y como resultado más importante se destaca que el estado del disco está controlado por esfuerzos de compresión para un valor $\omega_0 = 30^\circ$.

Palabras clave: mecánica de materiales, esfuerzos, compresión, programación, disco brasileiro.

¹ Ingeniero civil. PhD en Ciencias Técnicas. Profesor titular, Universidad de La Salle, Bogotá, Colombia. Director del Laboratorio de Modelos Geotécnicos (GeoLab). Grupo de investigación CIROC, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: atorresc@unisalle.edu.co

² Ingeniero civil. MSc en Estructuras. Candidato a doctor en Ciencia y Tecnología de Materiales. Profesor asistente de la Universidad de La Salle, Bogotá, Colombia. Grupo de investigación CIROC, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: falamus@unisalle.edu.co

³ Ingeniero civil. Integrante del semillero de investigación del grupo CIROC, Universidad de La Salle, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: sbahamon15@unisalle.edu.co

⁴ Ingeniero civil. Integrante del semillero de investigación del grupo CIROC, Universidad de La Salle, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: jvesga32@unisalle.edu.co

FECHA DE RECEPCIÓN: 7 DE ENERO DE 2013 • FECHA DE APROBACIÓN: 18 DE ABRIL DE 2013

Cómo citar este artículo: Torres Prada, A. C.; Lamus Báez, F. A.; Bahamón Blanco, S. y Vesga Medina, J. S. (2013). Estudio analítico del estado de esfuerzos en un disco indeformable ante carga diametral. *Épsilon* (20), 11-39.

Analytic Study of the Stress State on a Non-Deformable Disc Subject to Diametral Compression

ABSTRACT

One of the current issues in the mechanics of materials field is to perform an analytic determination of the stress state of non-deformable disc-type specimens subject to diametral compression. The present approach searches to contribute to the accurate design of new tests that allow a mechanic characterization of materials, tests required in sectors such as the concrete industry, rock mechanics and mechanics of other construction materials. One of the latest analytic proposals to solve the problem is found in the work of Markides, Kourkoulis and Chatzistergos, which shows an equation system with which to obtain the distribution of internal stress within a non-deformable disc. The present article illustrates the development of a calculation program built in Fortran programming language, with aims to study the change of stress states within the disc as the distribution of the compression varies in the perimeter of the sample, an area related to the internal angle ω_0 measured from the center of the disc and reaches the limit of the contact area. Specifically, this experimental numerical stage seeks to establish the range of values of ω_0 in which the stress of the disc presents primarily a compression state. The results show the distribution of radial σ_r , tangential $\sigma_{\theta\theta}$ and shear $\tau_{r\theta}$ stress for the geometrical case established in the present investigation. Moreover, it highlights that the state of the disc is controlled in particular by compression stress for a value of $\omega_0 = 30^\circ$.

Keywords: Mechanics of materials, stress, compression, programming, brazilian disc.

Estudo analítico do estado de esforços em um disco indeformável diante de carga diametral

RESUMO

Determinar analiticamente o estado de esforços de espécimes tipo disco submetidos a cargas diametraes é um problema atual da mecânica de materiais. Estas aproximações contribuem para desenharmos de maneira acertada novos ensaios que permitem caracterizar mecanicamente os materiais, as provas necessárias em setores como a indústria do concreto, a mecânica de rochas e de outros materiais de construção. Uma das últimas propostas analíticas para a solução do problema se encontra no trabalho de Markides, Kourkoulis e Chatzistergos, que mostra um sistema de equações com o qual obter a distribuição de esforços internos dentro do disco de material indeformável. Neste artigo se desenvolve um programa de cálculo construído na linguagem de programação Fortran, a fim de estudar a variação do estado de esforços dentro do disco à medida que varia a distribuição da carga não perímetro da mostra, área relacionada com o ângulo interno ω_0 medido desde o centro do disco e que barre o limite da área de contato. Em particular se busca, mediante esta fase experimental numérica, estabelecer o rango de valor de ω_0 no que los esforços do disco apresentem um estado primordialmente de compressão. Os resultados entregam a distribuição dos esforços radial σ_r , tangencial $\sigma_{\theta\theta}$ e cortante $\tau_{r\theta}$ para o caso geométrico estabelecido nesta pesquisa, e como resultado mais importante se destaca que o estado do disco está controlado particularmente por esforços de compressão para um valor $\omega_0 = 30^\circ$.

Palavras chave: mecânica de materiais, esforços, compressão, programação, disco brasileiro.

Introducción

El estado de esfuerzos internos en un disco sometido a cargas diametrales presenta una distribución muy compleja que varía notablemente en función del tipo de carga aplicada; a partir de una representación en relieve, la figura 1 muestra, a manera de ejemplo, la variación del campo de esfuerzos en un disco acrílico sometido al incremento de la carga puntual diametral y controlado mediante un ensayo de fotoelasticidad. El descubrimiento de la técnica de fotoelasticidad se debe a sir David Brewster en 1816, quien observó que cuando una pieza de vidrio cargada es iluminada mediante luz polarizada, aparece un patrón de colores causado por los esfuerzos que hay en la pieza.

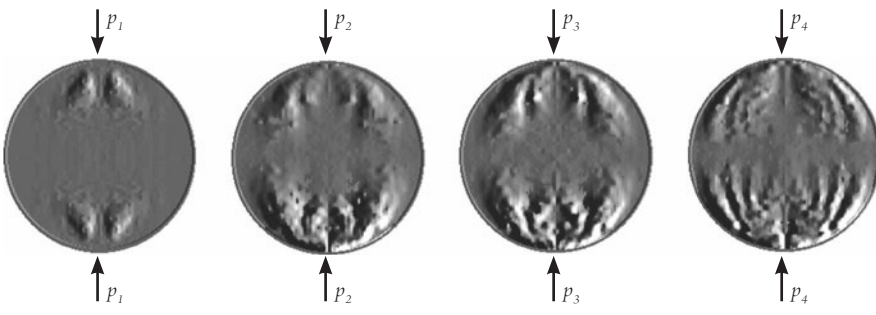


Figura 1. Variación en el estado de esfuerzos para $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$

Fuente: Bahamon y Vesga (2012).

Los análisis teóricos de la distribución de los esfuerzos en este problema han tenido diversas propuestas de soluciones a partir de la mecánica de materiales. Basados en la teoría de elasticidad, Timoshenko y Goodier (1970) presentan la solución analítica para la determinación de los esfuerzos internos dentro de un disco circular de diámetro d y de un espesor unitario, sometido a la acción de dos fuerzas concentradas iguales de magnitud P pero de sentido contrario, y que actúan a lo largo del diámetro vertical de la muestra; la solución planteada se trabaja en coordenadas cartesianas como se indica en la figura 2.

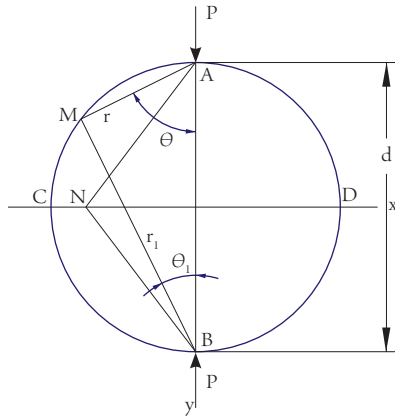


Figura 2. Esquema de carga para disco sometido a dos fuerzas iguales y opuestas P

Fuente: Timoshenko y Goodier (1970).

Como resultados principales de la solución planteada en ese trabajo se encuentra que los esfuerzos a lo largo del diámetro horizontal tienen la siguiente magnitud:

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi d}; \quad \sigma_y = \frac{2P}{\pi d} \left[1 - \frac{4d^4}{(d^2 + 4x^2)^2} \right] \quad (1)$$

Además se demuestra que el valor de σ_x es constante a lo largo del diámetro CD, y que el σ_y en el centro del disco alcanza un valor máximo de:

$$\sigma_y = \frac{-6P}{\pi d} \quad (2)$$

Por tanto, en el centro del disco se obtiene que la magnitud para los esfuerzos principales es igual a:

$$\sigma_1 = \frac{2P}{\pi d}; \quad \sigma_2 = \frac{-6P}{\pi d}; \quad \bar{\sigma} = \frac{P}{d} \quad (3)$$

Por esta razón, el valor teórico del esfuerzo en el centro del disco, dado por $(\sigma_x - \sigma_x)/\bar{\sigma}$, equivale a $8/\pi$, es decir, 2,546, valor que ha sido ampliamente demostrado

por diversos métodos experimentales como en el trabajo de Durelli (Timoshenko y Goodier, 1970), en el cual por los métodos de fotoelasticidad y de Moiré se obtiene un valor para $(\sigma_x - \sigma_y)/\bar{\sigma} = 2,4$, muy aproximado al teórico; sin embargo, también se reporta que el esfuerzo en el centro puede ser sensiblemente afectado por la distribución de la fuerza P en las pequeñas áreas de contacto durante el ensayo.

Dada la geometría circular del problema, y limitándolo a un estado plano de esfuerzos, muchas de las soluciones se han planteado en términos de un análisis en un campo de coordenadas polares r, θ . La definición de los esfuerzos en un elemento infinitesimal de un cuerpo en coordenadas polares la expresan con precisión Chou y Pagano (1967), y se ilustran en la figura 3.

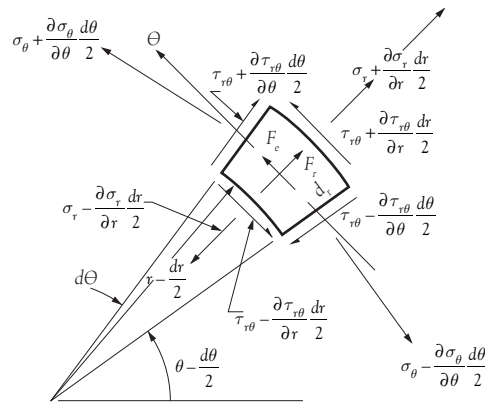


Figura 3. Esfuerzos en un elemento en coordenadas polares

Fuente: Chou y Pagano (1967).

Si se asume que la dimensión del elemento en la dirección z es unitaria, con aproximaciones de ángulos θ muy pequeños, y finalmente se desprecian las fuerzas de cuerpo $F_r = F_\theta = 0$, las ecuaciones de equilibrio del elemento infinitesimal en las dos direcciones principales son:

$$\left[\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \right] \cos \theta - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} \right] \sin \theta = 0 \quad (4)$$

Para las direcciones principales la ecuación 4 toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \text{ para } \theta = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0 \text{ para } \theta = \pi/2 \quad (5)$$

En la ecuación de equilibrio 5, la primera parte corresponde a la ecuación de equilibrio en la dirección radial, y la segunda parte, a la tangencial.

Las soluciones hasta ahora consideradas son propuestas netamente teóricas, pues en los casos anteriores se parte del supuesto de una solución en un estado plano de esfuerzos, es decir, bidimensional. La practicidad de poder conocer el estado de esfuerzos dentro del disco sometido a carga radica, entre muchos otros casos, en poder determinar parámetros de resistencia del material. En la actualidad, bajo esta premisa se han desarrollado múltiples ensayos de caracterización de materiales para diversos sectores, desde la industria farmacéutica en el estudio de medicamentos con forma de pastilla para determinar su resistencia durante los procesos de producción y de almacenamiento, pasando por todos los materiales para la industria de la construcción y, en el caso particular de la mecánica de rocas, para desarrollar pruebas rápidas, sencillas de realizar y de bajo costo que permitan conocer la resistencia a la tracción de la roca intacta.

Uno de los más aplicados en este aspecto es el denominado ensayo de tracción indirecta o brasilero (figura 4) desarrollado a mediados del siglo XX, simultáneamente pero de forma independiente, por los científicos Carneiro de Brasil y Akazawa de Japón (Ma y Hung, 2008); por definición, la resistencia a la tracción se obtiene por el ensayo de tracción uniaxial directa, pero este ensayo tiene determinado grado de dificultad en su aplicación; de esta manera, la determinación de la tracción indirecta es más práctica en temas de operación y de costo, y es uno de los ensayos más simples en la mecánica de rocas, la fractura diametral que se produce en el espécimen es producida por la carga aplicada en un rango determinado (ISRM, 2010).

A manera de resumen se puede establecer que para el ensayo brasilero se requiere que la máquina de carga se ajuste a los requerimientos de la norma ASTM E-4; los bloques de contacto entre espécimen y celda de carga deben asegurar un ángulo de falla entre los 10° y 15°, y la longitud de contacto del arco de carga no debe superar el valor de $D/6$, siendo D el diámetro de la muestra (numeral 5.2.2, ASTM

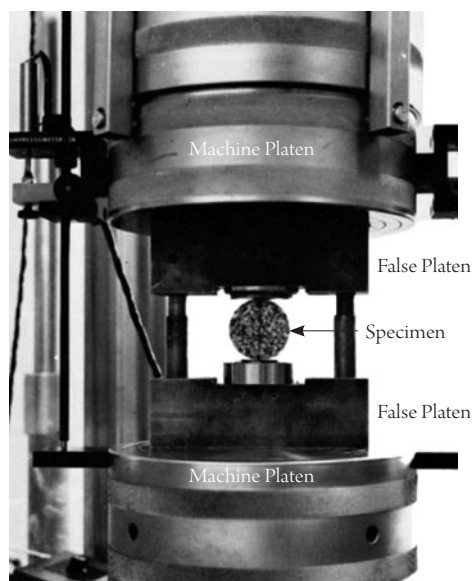


Figura 4. Montaje del ensayo brasilerero

Fuente: ASTM, D3967 (2008).

D3967-08), o se debe asegurar un ángulo de falla que no supere los 10° (numeral 1, parte 2. ISRM Doc. 1978).

El espécimen de ensayo debe tener un diámetro mínimo correspondiente al de una broca de perforación serie NX, con una muestra efectiva de 54 mm (numeral 3, parte 2. ISRM Doc. 1978) y con una relación de espesor sobre diámetro (t/D) entre 0,2 y 0,75 (numeral 7.1, ASTM D3967-08).

La aplicación de carga se realiza con una velocidad controlada de 200 N/s (numeral 3(e), parte 2. ISRM Doc. 1978) o con un control por esfuerzos entre 0,05 y 0,35 MPa/s para una duración de ensayo entre 1 y 10 min (numeral 8.3, ASTM D3967-08). El valor de la resistencia a la tracción del espécimen en MPa puede ser calculado como:

$$\sigma_t = \frac{0,636P}{Dt} \text{ (Numeral 4. Parte 2. ISRM Doc.1978)}$$

$$\sigma_t = \frac{2P}{\pi LD} \quad (\text{Numeral 9.1. ASTM D3967-08}) \quad (6)$$

El estado de esfuerzos que experimentan los especímenes bajo las características de un ensayo brasilero ha sido estudiado de manera teórica por diversos investigadores por largo tiempo, con el fin de poder relacionar la carga que produce la falla del disco con la verdadera resistencia del material a la tracción. En el trabajo de Ye, Wu, Zhang y Ji (2012) se presenta la solución analítica para los estados de esfuerzos y deformaciones dentro del espécimen de disco en un ensayo brasilero con el supuesto de aplicación de cargas concentradas. La solución se trabaja en coordenadas cartesianas y los resultados teóricos en este estudio son comparados con dos series de pruebas experimentales; dentro de las conclusiones se plantea que en algunos casos existen grandes discrepancias entre los cálculos teóricos de deformaciones dentro del espécimen y los registrados en las pruebas experimentales, y se establecen algunos límites respecto a en cuáles condiciones existe correspondencia con las pruebas experimentales.

La usual idealización de que la fuerza de compresión aplicada durante el ensayo brasilero trabaja como una carga concentrada ha sido cuestionada desde hace tiempo, y se sabe por la práctica ingenieril y experimental que durante el ensayo brasilero en realidad la carga se aplica en un área de contacto. Por lo anterior se han desarrollado intensos trabajos teóricos y experimentales que permiten avanzar en determinar el estado interno de esfuerzos del disco durante la prueba, bajo la hipótesis de diferentes tipos de distribución de la carga (figura 5).

Ma y Hung (2008) presentan en su trabajo un análisis numérico a partir de la solución teórica del estado de deformaciones del disco, bajo el supuesto de una carga uniformemente distribuida sobre un área de carga que varía entre $0 < \omega_0 < 60^\circ$. La complejidad de poder plantear una respuesta analítica al problema ha llevado a algunos investigadores a formular alternativas incluso en la geometría del problema, un ejemplo de lo anterior se presenta en el trabajo de Wang *et al.* (2004) en el cual los autores proponen un corte plano en las dos caras del disco para garantizar la uniformidad de la carga aplicada; en apariencia, el cambio en la geometría del disco mejora ligeramente las aproximaciones teóricas con las pruebas experimentales; sin embargo, esta propuesta complica el ensayo debido al incremento en el tiempo de preparación de la muestra y a que en la práctica se pueden deteriorar las muestras y aumentar el costo del ensayo.

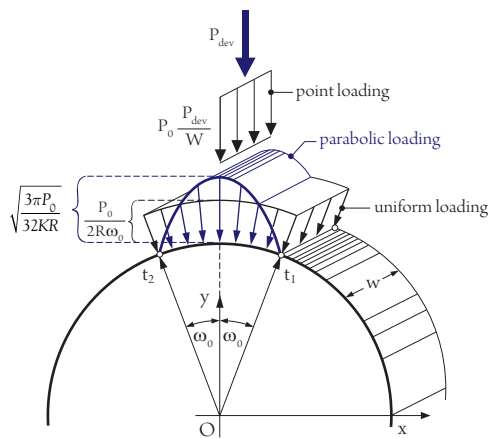


Figura 5. Distribución de cargas en diferentes estudios teóricos

Fuente: Markides *et al.* (2012a).

Markides *et al.* (2010) avanzan en un análisis teórico del estado de esfuerzos para el disco brasilero sometido a carga distribuida radial, trabajando sobre la geometría original del disco circular. Al comparar los resultados teóricos con una serie de pruebas experimentales con lectura de deformaciones de los especímenes se vuelven a poner de manifiesto las inconsistencias en los resultados; algunas de las más importantes tienen que ver con que el modelo teórico entrega resultados de la concentración de los esfuerzos máximos nuevamente en el eje vertical del espécimen, por donde se esperaría la fractura del material por superar su resistencia a la tracción; sin embargo, las pruebas experimentales muestran que en el caso particular estudiado las muestras se fracturaron también al final de la zona cargada, como se observa en la figura 6.

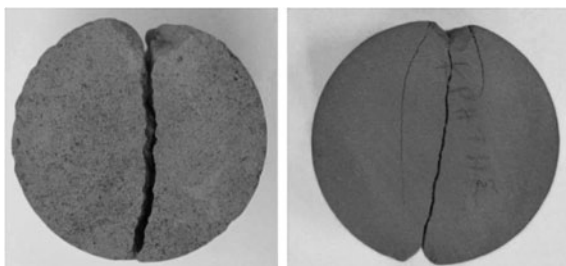


Figura 6. Fallas típicas en un ensayo brasilero con $\omega_0 = 10^\circ$

Fuente: Markides *et al.* (2010).

En sus conclusiones los autores vuelven a validar que el ensayo brasilero no es un método recomendable para medir la resistencia a la tracción del material, pero que dada la simplicidad del ensayo y con determinada estandarización en las dimensiones puede contribuir en la clasificación mecánica de la roca. Dentro de las conclusiones del mismo trabajo los autores exponen que los resultados entre la solución teórica y las pruebas experimentales desarrolladas son, en general, satisfactorios en casi todo el espacio del disco, a excepción de los puntos muy cercanos a la zona cargada; adicionalmente establecen que en la práctica la inevitable inclinación de los ejes de carga respecto a los planos del contorno del espécimen introducen discrepancias adicionales en la veracidad de los planos de esfuerzos y deformaciones asumidas en el análisis teórico.

Uno de los grandes avances en la solución teórica del problema planteada en la propuesta de Markides *et al.* (2010) fue la de dividir o condicionar el análisis del estado de esfuerzos dentro del disco en dos zonas, así: la zona I para puntos del disco dentro o por debajo del área cargada, y la zona II para puntos del disco por fuera del área de carga; para cada una de las dos zonas las ecuaciones para determinar los esfuerzos dentro del disco son condicionadas mediante una serie de argumentos matemáticos expuestos también por los autores en su trabajo.

Los mismos autores presentan una nueva solución en su trabajo *The Brazilian disc under non-uniform distribution of radial pressure and friction* (Markides *et al.*, 2012), en esa propuesta introducen varios conceptos importantes para mejorar los resultados teóricos y experimentales. El esquema de cálculo teórico propuesto en esa solución se indica en la figura 7.

Entre los nuevos conceptos se destaca el cambio en la distribución de la carga aplicada, p , que varía de magnitud desde un máximo en el punto central en la posición del eje vertical del disco y decrece de forma sinusoidal y radial hasta cero en los extremos del área de carga, también se introduce una fuerza de fricción T no uniforme que actúa en el área de carga. La solución propuesta en forma de una serie robusta de ecuaciones parte de los siguientes supuestos:

- a) El problema es completamente simétrico; por tanto, el análisis se realiza para el primer cuarto de circunferencia.

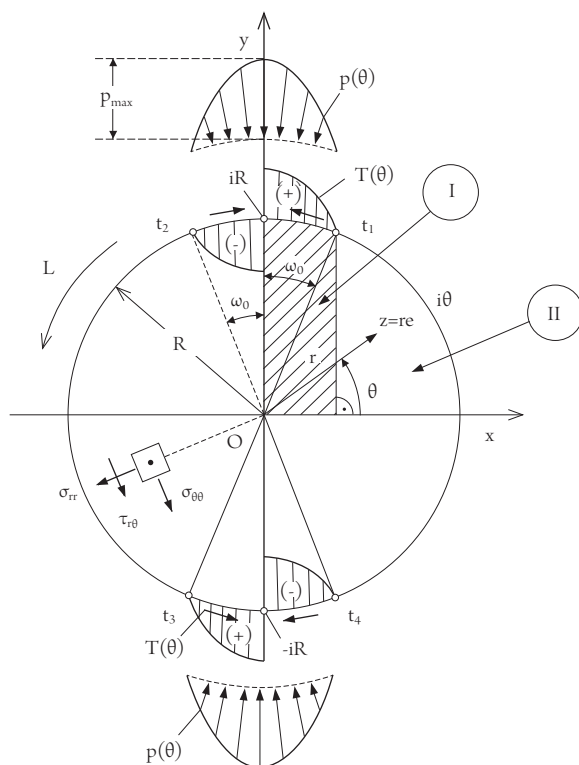


Figura 7. Esquema de cálculo y definición de símbolos en el análisis teórico del ensayo de disco brasiero bajo compresión sinusoidal p y fricción T

Fuente: Markides (2012).

- b) Se realiza la diferenciación de las dos zonas de análisis propuestas en su trabajo anterior, estas son determinantes para la selección correcta de los parámetros de condición de las ecuaciones.
- c) Para la determinación de los esfuerzos se toma un valor de radio r y un ángulo de dirección θ . Por tanto, el resultado quedará en términos de coordenadas polares.
- d) Las ecuaciones se basan en relaciones trigonométricas que solo actúan como un factor amplificador para el término $c/2\pi$, donde c equivale al valor en unidades de esfuerzo de la máxima carga p_{max} en el área cargada relacionada con el ángulo ω_0 y se calcula a partir de la ecuación 7.

$$c = \frac{|P_{\max}|}{\sin 90 - \cos \omega_0} \quad (7)$$

Dentro de las principales conclusiones de la solución planteada (Markides *et al.*, 2012) se destaca que el estado de esfuerzos en la parte central del disco se comporta de manera similar al estado de esfuerzos para un disco sometido a una carga distribuida radial pero en el contorno y puntos próximos al área de carga cambian drásticamente. El hecho de introducir la fuerza de fricción produce cambios importantes en el estado de esfuerzos en las proximidades de la zona de aplicación de la carga; sin embargo, hacia el interior del disco su incidencia se hace despreciable.

Además se resalta que en el cálculo general la introducción de la fricción amplifica notablemente el estado de esfuerzos cerca de los arcos cargados, lo cual debe ser tema de mayor investigación, ya que en pruebas experimentales se ha observado que este incremento no se produce en la realidad debido a la microfracturación periférica del disco en los arcos cargados.

Por lo anterior, en la presente investigación se realiza un análisis del componente p de la carga y no se considera el componente de fricción T , y en los análisis de resultados se considera esta simplificación, por tanto, de acuerdo con las condiciones mencionadas, las ecuaciones para determinar el campo de esfuerzos del disco debido a la acción de la carga o presión externa sinusoidal y radial p , y que se relacionan con los valores de esfuerzo σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y $\tau_{r\theta}$ para cualquier punto al interior del disco son:

En la ecuación 8 los términos contenidos dentro del indicador “>” deben interpretarse de la siguiente forma: el término superior se usa para determinar el componente de esfuerzo σ_{rr} y el inferior para evaluar el componente $\sigma_{\theta\theta}$; de igual manera, el signo superior dentro del símbolo “±” se usa para calcular el componente σ_{rr} y el inferior para $\sigma_{\theta\theta}$.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} = \frac{c}{2\pi} & \left\langle \begin{aligned} & -4\omega_0 \cos \omega_0 + \frac{(R^2 - r^2)^2}{2Rr^3} \\ & \frac{3r^4 - 2R^2r^2 - R^4}{2Rr^3} \end{aligned} \right\rangle * \cos \theta \left[\ln \sqrt{\frac{R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta - \omega_0)}{R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta + \omega_0)}} - \ln \sqrt{\frac{R^2 + r^2 + 2Rr \sin(\theta - \omega_0)}{R^2 + r^2 + 2Rr \sin(\theta + \omega_0)}} \right] + \\
 & \left(\frac{r^4 + 4R^2r^2 - R^4}{2Rr^3} \right) \sin \theta - 2 \cos \omega_0 \left[\arg(t_1 - z) - \arg(t_2 - z) \right] - \\
 & \left(\frac{r^4 + 4R^2r^2 - R^4}{2Rr^3} \right) \sin \theta - 2 \cos \omega_0 \left[\arg(t_1 - z) - \arg(t_2 + z) \right] + \frac{R^2 - r^2}{r} \left[\left(\frac{r^2 \cos 2\theta - R^2}{2Rr} + \cos \omega_0 \sin \theta \right) * \right. \\
 & \left. \left(\frac{R \sin \omega_0 - r \cos \theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta + \omega_0)} + \frac{R \sin \omega_0 - r \cos \theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta + \omega_0)} \right) - \right. \\
 & \left. \left(\frac{r \sin 2\theta}{2R} - \cos \omega_0 \cos \theta \right) \left(\frac{-R \cos \omega_0 - r \sin \theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta + \omega_0)} + \frac{R \cos \omega_0 - r \sin \theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta - \omega_0)} \right) + \left(\frac{r^2 \cos 2\theta - R^2}{2Rr} - \cos \omega_0 \sin \theta \right) * \right. \\
 & \left. \left(\frac{R \sin \omega_0 + r \cos \theta}{R^2 + r^2 + 2Rr \sin(\theta + \omega_0)} + \frac{R \sin \omega_0 + r \cos \theta}{R^2 + r^2 + 2Rr \sin(\theta - \omega_0)} \right) - \right. \\
 & \left. \left(\frac{r \sin 2\theta}{2R} + \cos \omega_0 \cos \theta \right) \left(\frac{-R \cos \omega_0 - r \sin \theta}{R^2 + r^2 + 2Rr \sin(\theta + \omega_0)} + \frac{R \cos \omega_0 - r \sin \theta}{R^2 + r^2 + 2Rr \sin(\theta - \omega_0)} \right) \right] \Bigg\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{r\theta} = & \frac{c}{2\pi} \left[\frac{(R^2 - r^2)^2}{2Rr^3} * \sin \theta \left[\ln \sqrt{\frac{R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta - \omega_0)}{R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta + \omega_0)}} - \ln \sqrt{\frac{R^2 + r^2 + 2Rr \sin(\theta - \omega_0)}{R^2 + r^2 + 2Rr \sin(\theta + \omega_0)}} \right] + \left(\frac{r^4 - R^4}{2Rr^3} \right) \cos \theta \left[\arg(t_2 - z) - \right. \right. \\
 & \left. \left. \arg(t_1 - z) - \arg(t_2 + z) + \arg(t_1 + z) \right] - \frac{R^2 - r^2}{r} \left[\left(\frac{r^2 \cos 2\theta - R^2}{2Rr} + \cos \omega_0 \sin \theta \right) * \left(\frac{-R \cos \omega_0 + r \sin \theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta + \omega_0)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{R \cos \omega_0 - r \sin \theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta - \omega_0)} \right) + \left(\frac{r \sin 2\theta}{2R} - \cos \omega_0 \cos \theta \right) \left(\frac{R \sin \omega_0 - r \cos \theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta + \omega_0)} - \frac{R \sin \omega_0 - r \cos \theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \sin(\theta - \omega_0)} \right) + \left(\frac{r^2 \cos 2\theta - R^2}{2Rr} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \cos \omega_0 \sin \theta \right) * \left(\frac{-R \cos \omega_0 - r \sin \theta}{R^2 + r^2 + 2Rr \sin(\theta + \omega_0)} + \frac{R \cos \omega_0 + r \sin \theta}{R^2 + r^2 + 2Rr \sin(\theta - \omega_0)} \right) + \left(\frac{r \sin 2\theta}{2R} + \cos \omega_0 \cos \theta \right) \left(\frac{R \sin \omega_0 + r \cos \theta}{R^2 + r^2 + 2Rr \sin(\theta + \omega_0)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{R \sin \omega_0 + r \cos \theta}{R^2 + r^2 + 2Rr \sin(\theta - \omega_0)} \right) \right] \Bigg\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

La utilización de las dos zonas de análisis requiere el uso de una serie de argumentos, también definidos como relaciones trigonométricas. Los argumentos en las zonas I y II se expresan en el sistema de ecuaciones 10:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Argumentos de la zona 1:} & \text{Argumentos de la zona 2:} \\
 \arg(t_1 - z) = \arctan\left(\frac{R \cos \omega_0 - r \sin \theta}{R \sin \omega_0 - r \cos \theta}\right) & \arg(t_1 - z) = \pi + \arctan\left(\frac{R \cos \omega_0 - r \sin \theta}{R \sin \omega_0 - r \cos \theta}\right) \\
 \arg(t_1 + z) = \arctan\left(\frac{R \cos \omega_0 + r \sin \theta}{R \sin \omega_0 + r \cos \theta}\right) & \arg(t_1 + z) = \arctan\left(\frac{R \cos \omega_0 + r \sin \theta}{R \sin \omega_0 + r \cos \theta}\right) \\
 \arg(t_2 - z) = \pi - \arctan\left(\frac{R \cos \omega_0 - r \sin \theta}{R \sin \omega_0 + r \cos \theta}\right) & \arg(t_2 - z) = \pi - \arctan\left(\frac{R \cos \omega_0 - r \sin \theta}{R \sin \omega_0 + r \cos \theta}\right) \\
 \arg(t_2 + z) = \pi - \arctan\left(\frac{R \cos \omega_0 + r \sin \theta}{R \sin \omega_0 - r \cos \theta}\right) & \arg(t_2 + z) = -\arctan\left(\frac{R \cos \omega_0 + r \sin \theta}{R \sin \omega_0 - r \cos \theta}\right)
 \end{array} \quad (10)$$

La gran ventaja de esta solución radica en el hecho de que los intensos gradientes de esfuerzos que aparecen cerca de los extremos cargados cuando se considera una carga distribuida radial son eliminados, aproximándose mucho más a los comportamientos naturales durante las pruebas experimentales.

Con todo el material hasta aquí expuesto se hace evidente que el problema estudiado sigue siendo muy complejo y una aproximación teórica se debe mejorar a partir de otros métodos de investigación que también han puesto de manifiesto la sensibilidad que tiene el tipo y la distribución de la carga aplicada, y su efecto sobre el estado de esfuerzos dentro del disco.

Se han llevado a cabo estudios de la incidencia del aumento progresivo del área de contacto de la carga utilizando el Método de Elementos Finitos (FEM), entre estos el realizado por Yu, Zhang y Zhang (2008), donde se muestra una variación del arco de contacto, con un ángulo de falla de 20° . Esta propuesta surge a partir de las críticas dadas al ensayo de tracción indirecta desde el año 1964, porque el valor de resistencia obtenido a la tracción es más bajo que el valor verdadero que se tiene a partir de un modelo con una relación diámetro/espesor de 0,2 (Fairhurst, 2007). Estos estudios mostraron los siguientes resultados: la comparación entre los resultados de tracción directa, tracción indirecta tradicional y el ensayo modificado a longitud de contacto de arco de 20° muestra que el valor de resistencia a tracción dado por el ensayo a 20° es menor que el valor de resistencia a tracción que se obtiene al realizar pruebas de tracción directa y brasilero tradicional, y que a partir de la modelación con elementos finitos y los resultados de ensayo se encuentra una disminución notable de los valores de esfuerzo a tracción en el campo de esfuerzos, debido a la presencia y el aumento de los esfuerzos a compresión en ciertas regiones de la muestra.

El estudio del comportamiento de este tipo de especímenes en el ensayo brasilero mediante la modificación del arco de contacto de carga también fue estudiado recientemente por Erarslan y Williams (2011), quienes motivados por las inconsistencias del ensayo brasilero con respecto a los verdaderos valores de resistencia a la tracción y las recomendaciones realizadas por la ISRM (2010) para la ejecución de este tipo de pruebas en materiales rocosos, analizaron la variación de los siguientes ángulos de carga ω_0 : 15°, 20° y 30°. La realización de un solución analítica básica, la utilización de una modelación tipo FEM y la ejecución de ensayos de laboratorio permitieron la comparación de los ensayos realizados con el tradicional ensayo brasilero. La investigación base se realizó con especímenes de areniscas y granito. Los resultados obtenidos fueron los siguientes: para ω_0 de 15° los valores de resistencia de esfuerzo a la tracción son los más bajos, para ω_0 de 20° y 30° los valores de tracción aumentan escalonadamente pero sin superar el valor de tracción obtenido mediante el brasilero tradicional; de la misma manera, los autores sugieren que la disminución notable de los esfuerzos a tracción es causada por la presencia de esfuerzos a compresión que se hacen mayores en el contorno de la muestra y en la mayoría de su zona periférica.

A partir de la solución propuesta por Markides *et al.* (2012) con su nueva distribución de carga aplicada p , en el presente artículo se muestra la investigación analítica que se realizó con el propósito de estudiar el estado de esfuerzos internos de un disco de diámetro aproximado a 47,60 mm, que en la práctica correspondería a especímenes de roca recuperados con una broca de perforación tipo NQ. Como objetivos del estudio se plantearon, en primer lugar, estudiar la incidencia en el estado tensional dentro del disco por la variación de la longitud de los arcos de contacto de la carga aplicada y, adicionalmente, determinar si existe un valor para ω_0 en el que hay una condición primordial de compresión dentro del material.

Metodología

Para alcanzar los dos objetivos planteados se realiza una investigación de tipo numérico experimental basada en las ecuaciones (8), (9) y (10), las cuales entregan las magnitudes del campo de esfuerzos en sus tres componentes: σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y $\tau_{r\theta}$ para cualquier punto en el interior del disco. Como constantes se han establecido: la geometría del disco caracterizado por su radio $R = 23,5 \times 10^{-3}$ m, radio que corresponde a una muestra recuperada con una broca de perforación NQ; la magnitud

del esfuerzo aplicado $c = 50$ MPa, valor que corresponde a los esfuerzos admisibles a compresión de una roca de resistencia media.

Entre tanto, se ha fijado como variable la distribución de la carga en el perímetro de la muestra en términos del ángulo interno ω_θ medido desde el centro del disco y que barre los límites del área cargada. Se han establecido cinco valores de variación de ω_θ así: carga concentrada, $7,5^\circ$, 15° , 30° y 45° . Dada la magnitud del trabajo de cálculo se optó por desarrollar tres programas sencillos en lenguaje Fortran para el cálculo de los esfuerzos. La interpretación visual de los resultados se llevó a cabo mediante imágenes tipo relieve construidas con una herramienta CAD.

Definición del algoritmo de programación

Una vez determinadas las constantes y variables fundamentales de los cálculos de los esfuerzos, se establece el algoritmo de programación que se muestra en la figura 8.

Con el fin de organizar y simplificar los cálculos se seccionaron las ecuaciones (8) (9) y (10) y se definieron los siguientes tres factores:

Factor A: factor multiplicador con variables trigonométricas y logarítmicas antes de los argumentos de la zona analizada.

Factor B: factor multiplicador en el cual se tienen en cuenta los argumentos de la zona analizada.

Factor C: factor multiplicador con variables trigonométricas después del factor en el cual se tienen en cuenta los argumentos de la zona analizada.

Se estableció además la geometría del campo de esfuerzos por calcular, por medio de un mallado en coordenadas polares que definen los puntos en donde se calculan las tres componentes del esfuerzo: σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ y $\tau_{r\theta}$. En la figura 9 se presenta la distribución geométrica para el cálculo. El radio de la muestra R se divide en 10 segmentos y cada cuadrante en 8 sectores de $12,5^\circ$ cada uno, lo que genera una malla de 11 valores de r y 9 valores para θ que producen 91 puntos de cálculo de las tres componentes de esfuerzos, es decir, 273 cálculos para cada valor de ω_θ con un total de 1365 cálculos para las cinco variaciones de ω_θ .

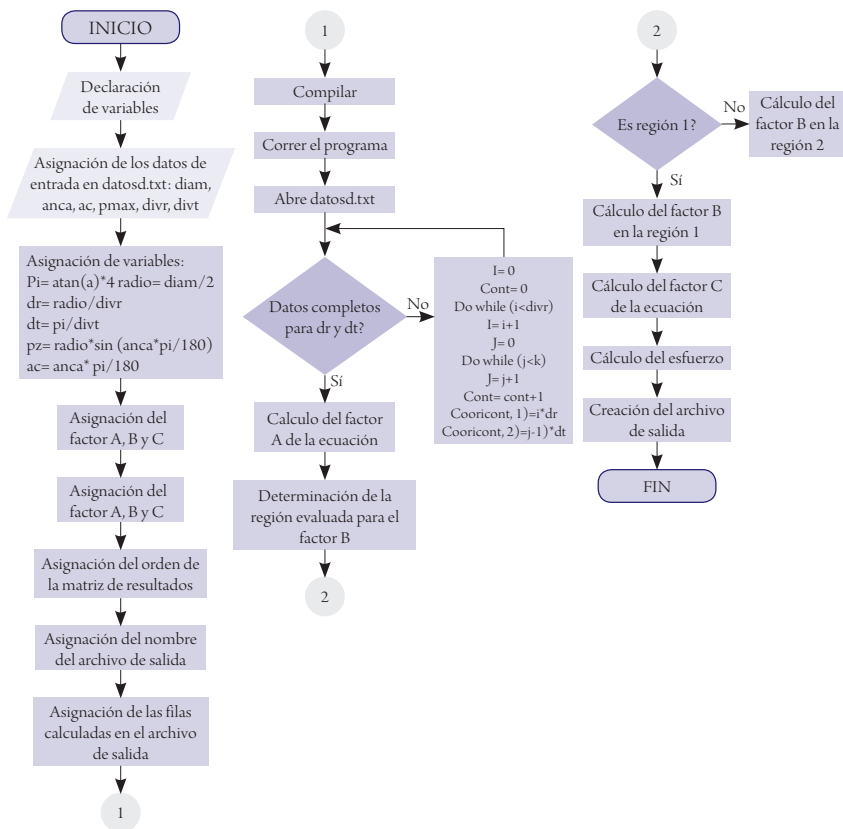


Figura 8. Algoritmo de la programación para el cálculo de esfuerzos dentro del disco

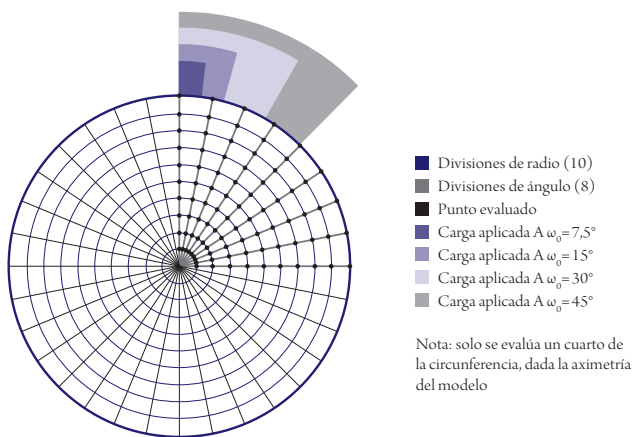


Figura 9. Definición de las condiciones de carga y nodos de cálculo en coordenadas polares

Desarrollo del programa

Debido a la extensión de los cálculos se generaron tres subprogramas, uno para cada componente de esfuerzo en coordenadas polares (r, θ) , a estos se les denominó de la siguiente manera: “radiales rr.f95”, calculan la magnitud del componente de esfuerzo radial σ_r ; “normales thth.f95”, calculan la magnitud del componente de esfuerzo normal $\sigma_{\theta\theta}$; “cortantes rth.f95”, calculan la magnitud del componente de esfuerzo cortante $\tau_{r\theta}$. La nomenclatura de las variables generales que se usaron en cada programa se presenta en la tabla 1.

Tabla 1. Definición de las variables de programación

| NOMENCLATURA | DEFINICIÓN | NOMENCLATURA | DEFINICIÓN |
|---------------|--------------------------------|--------------|---------------------------------------------------|
| divr | Divisiones de radio | dt | Ángulo de ubicación (grados) |
| divt | Divisiones de ángulo | dr | Radio de ubicación (mm) |
| ndat | Número de datos | n | Valor igual a 1, cálculo de atan |
| i, j, k, l, m | Contadores para bucles | pi | Valor de pi: 3.14159 |
| cont | Contador | ti | ángulo de análisis |
| zona | Zona evaluada | ri | radio de análisis |
| diam | Diámetro de la muestra | compara | Condicional |
| anca | Ángulo de carga (radianes) | coor | Tamaño de la matriz |
| ac | Ángulo de carga (grados) | nththc | Esfuerzos normales $\theta\theta$ por carga (MPa) |
| pmax | Esfuerzo máximo aplicado (MPa) | nrrc | Esfuerzos radiales rr por carga (MPa) |
| radio | Radio de la muestra (mm) | crthc | Esfuerzos cortantes $r\theta$ por carga (MPa) |

Debido a que Fortran no permite establecer líneas demasiado extensas, cada una de las ecuaciones se segmentó en partes, y estas partes se dejaron establecidas como términos más cortos que la expresión original, aunque finalmente se determina el valor de cada esfuerzo σ operando dichos términos. En la figura 10 se muestra un ejemplo de la nomenclatura utilizada en dichas partes de las formulaciones, en donde las tres primeras letras del nuevo término de programación indican el tipo de esfuerzo y dirección que se está evaluando.


```

166  nrcci10=((ri*sin(2*ti))/(2*radio))+((cos(ac))*(cos(ti)))
167  nrcci11=((-radio*cos(ac))-ri*sin(ti))/(((radio**2)+(ri**2)+(2*radio*ri*sin(ti+ac))))
168  nrcci12=((radio*cos(ac))+ri*sin(ti))/(((radio**2)+(ri**2)+(2*radio*ri*sin(ti-ac))))

```

Finalmente se hacen las operaciones correspondientes, como la que aparece en la línea 169 del mismo programa:

```

169  nrcci = ... (nrcci5+nrcci6))+nrcci7*(nrcci8+nrcci9))-nrcci10*(nrcci11+nrcci12)

```

Las líneas de programación reflejan los diferentes términos y operadores que se utilizan para el cálculo de los esfuerzos, y también las condicionales y órdenes del lenguaje base utilizado. Los tres programas para el cálculo del estado de esfuerzos del componente de carga p dentro de un disco no compresible sometido a una carga no uniforme de tipo sinusoidal han sido publicados en la versión electrónica de esta revista y se pueden descargar libremente en el sitio: <http://revistas.lasalle.edu.co/index.php/ep/issue/view/50>.

Resultados

Los resultados de los programas son entregados en formato .txt en intensas listas de resultados, como se observa en la figura 12.

| Archivo | Edición | Formato | Ver | Ayuda |
|---------|---------|---------|----------|---------|
| 2.35000 | | | 0.00000 | 124.475 |
| 2.35000 | | | 0.196350 | 1981.47 |
| 2.35000 | | | 0.392699 | 3777.15 |
| 2.35000 | | | 0.589049 | 5445.35 |
| 2.35000 | | | 0.785398 | 6921.35 |
| 2.35000 | | | 0.981748 | 8144.26 |
| 2.35000 | | | 1.17810 | 9060.63 |
| 2.35000 | | | 1.37445 | 9628.46 |
| 2.35000 | | | 1.57080 | 9820.83 |
| 4.70000 | | | 0.00000 | 151.932 |
| 4.70000 | | | 0.196350 | 546.011 |
| 4.70000 | | | 0.392699 | 932.715 |
| 4.70000 | | | 0.589049 | 1300.22 |
| 4.70000 | | | 0.785398 | 1634.12 |
| 4.70000 | | | 0.981748 | 1917.98 |
| 4.70000 | | | 1.17810 | 2135.30 |
| 4.70000 | | | 1.37445 | 2271.99 |
| 4.70000 | | | 1.57080 | 2318.65 |
| 7.05000 | | | 0.00000 | 175.883 |
| 7.05000 | | | 0.196350 | 300.780 |
| 7.05000 | | | 0.392699 | 426.346 |
| 7.05000 | | | 0.589049 | 550.569 |
| 7.05000 | | | 0.785398 | 668.653 |
| 7.05000 | | | 0.981748 | 773.119 |
| 7.05000 | | | 1.17810 | 855.402 |
| 7.05000 | | | 1.37445 | 908.018 |
| 7.05000 | | | 1.57080 | 926.107 |
| 9.40000 | | | 0.00000 | 195.485 |
| 9.40000 | | | 0.196350 | 229.525 |
| 9.40000 | | | 0.392699 | 265.325 |

Figura 12. Resultados crudos de los cálculos por programación

La información de los archivos de texto se procesó para ser presentada como un conjunto de tres imágenes construidas con la herramienta CivilCad3D (versión metrix) tomando para cada coordenada calculada (r, θ) el valor de las magnitudes de esfuerzos como elevaciones; las imágenes obtenidas se muestran en la figura 13. Esta distribución de esfuerzos representa los valores de tracción y compresión para diferentes ángulos de carga, las magnitudes se representan en una escala de color

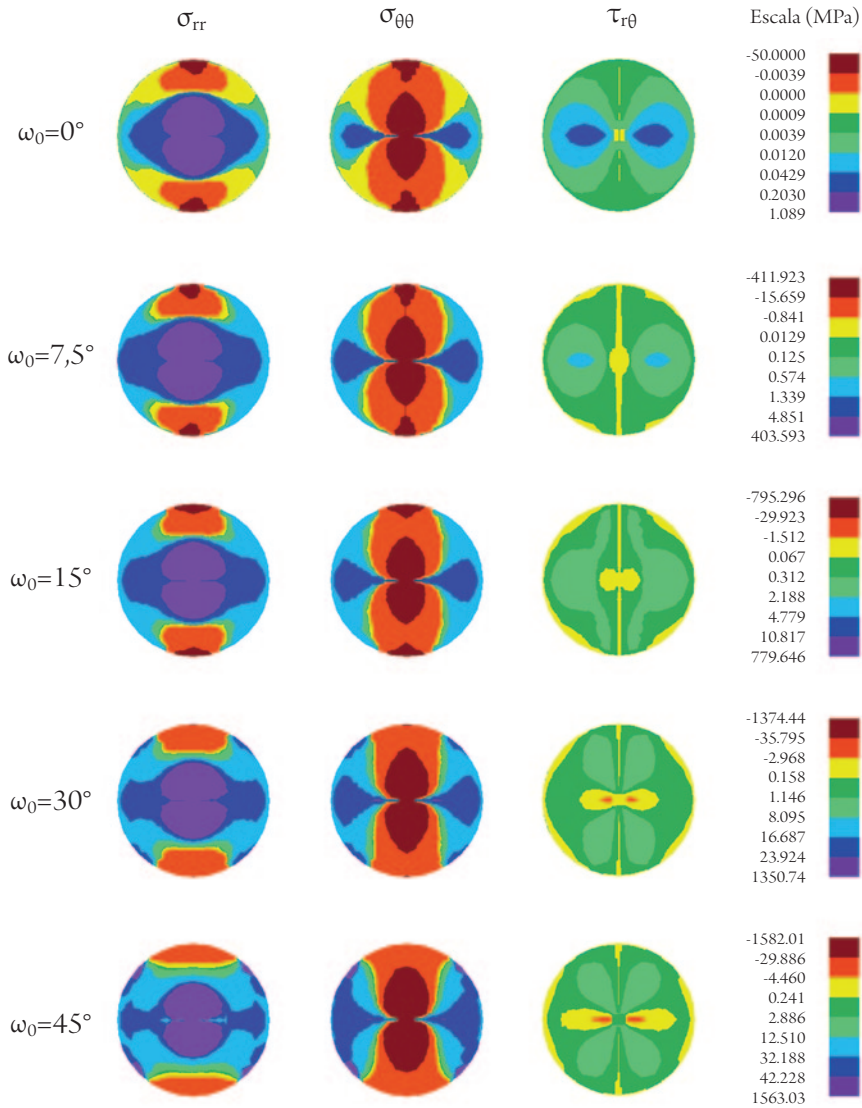


Figura 13. Estado de esfuerzos en un disco indeformable. $R = 23,5$ mm, $c = 50$ Mpa

con los valores de los límites superior e inferior de cada zona; todos los valores se encuentran en MPa debido a que la presión externa aplicada corresponde a $c=50$ MPa.

Análisis de resultados

En términos generales los resultados muestran un comportamiento del estado de esfuerzo en correspondencia con la discusión previa de la introducción, en particular se destaca que en los puntos próximos al centro del disco $r \approx 0$ y en los puntos del perímetro cercanos al arco de carga, es decir, con una condición de $\omega_0 \neq 0$, se tienen esfuerzos σ_{rr} y $\sigma_{\theta\theta}$ extremadamente magnificados; entre tanto, el comportamiento del esfuerzo cortante $\tau_{r\theta}$ es confiable para todo el disco, por ejemplo, para $\omega_0 = 45^\circ$ existen esfuerzos máximos calculados de $\sigma_{rr} = 1563,03$ Mpa y de $\sigma_{\theta\theta} = -1582,01$ localizados en el centro del disco, también existen esfuerzos de tracción cercanos a los máximos valores calculados de 1500 Mpa, tanto para σ_{rr} como para el componente $\sigma_{\theta\theta}$ en los puntos donde termina el arco de carga en el disco. Estos picos extremos son resultado propio de las condiciones algebraicas de la solución en las fronteras del espacio de cálculo.

Para un adecuado análisis de los resultados se debe, por tanto, depurar inicialmente los datos considerando los puntos particulares descritos anteriormente donde se excede el valor normal de la magnitud del esfuerzo, que en teoría deben ser de magnitud similar al esfuerzo máximo aplicado de $c = 50$ Mpa. Para tal fin, y de acuerdo con lo propuesto por Chen, Pan y Amadei (1998) y Jianhong, Wu y Sun (2008), la representación de la distribución de esfuerzos puede realizarse a partir de líneas de un mismo nivel de esfuerzo como se muestra en la figura 14 y donde no se registran los picos magnificados del cálculo.

Una vez obtenidos los estados depurados de esfuerzos, se pueden observar las variaciones por cada componente de esfuerzos en relación con un aumento del arco cargado ω_0 ; en términos generales, con respecto a los componentes de esfuerzo σ_{rr} y $\sigma_{\theta\theta}$ se aprecia que la variación del estado de esfuerzos para el componente σ_{rr} dentro de la zona central del disco aumenta en aproximadamente 10 veces pero se mantiene en condiciones de tracción; entre tanto, la variación del estado de esfuerzos para el componente $\sigma_{\theta\theta}$ aumenta pero en menor proporción, en aproximadamente solo dos veces, manteniéndose el estado a compresión para este componente.

MPa

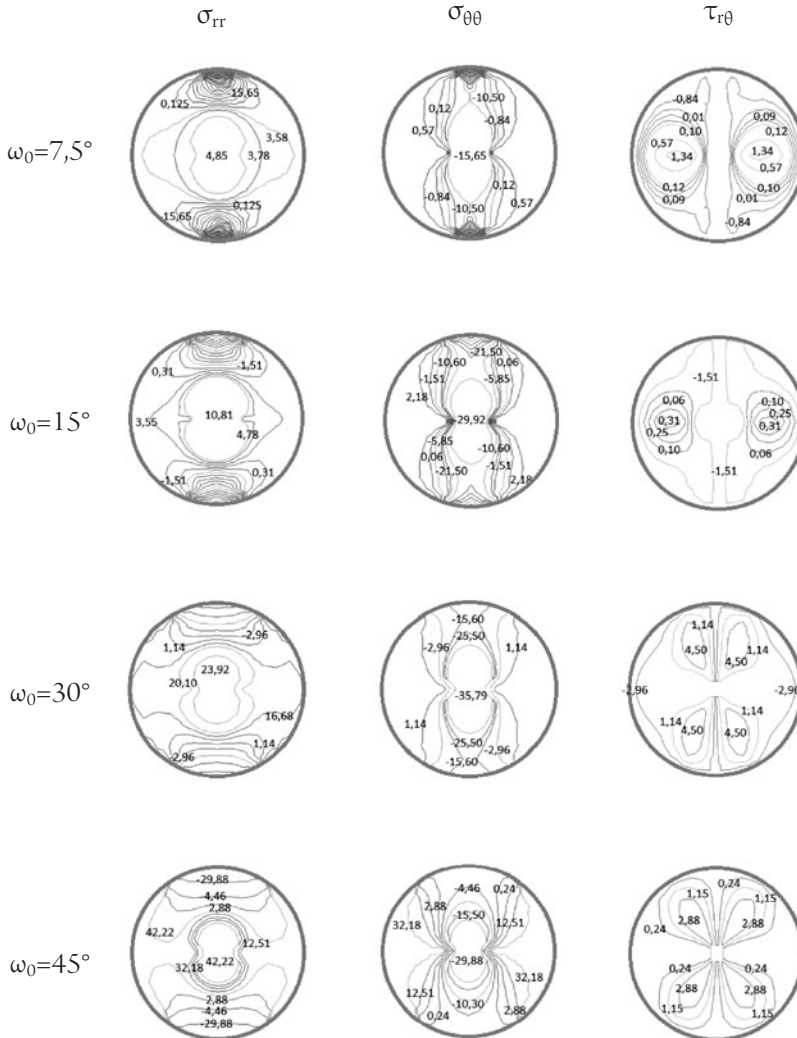


Figura 14. Estado de esfuerzos en un disco indeformable. $R = 23,5$ mm, $c = 50$ Mpa

Con relación al esfuerzo cortante $\tau_{r\theta}$ se puede observar una variación de la distribución pero que en general se mantiene en magnitudes muy pequeñas, y a lo largo del eje vertical del disco son cercanas a cero. En detalle, la figura 15 muestra en el cuadrante indicado del disco la variación del esfuerzo radial para los diferentes ángulos de carga.

Esfuerzos Radiales Máximos (σ_{rr})

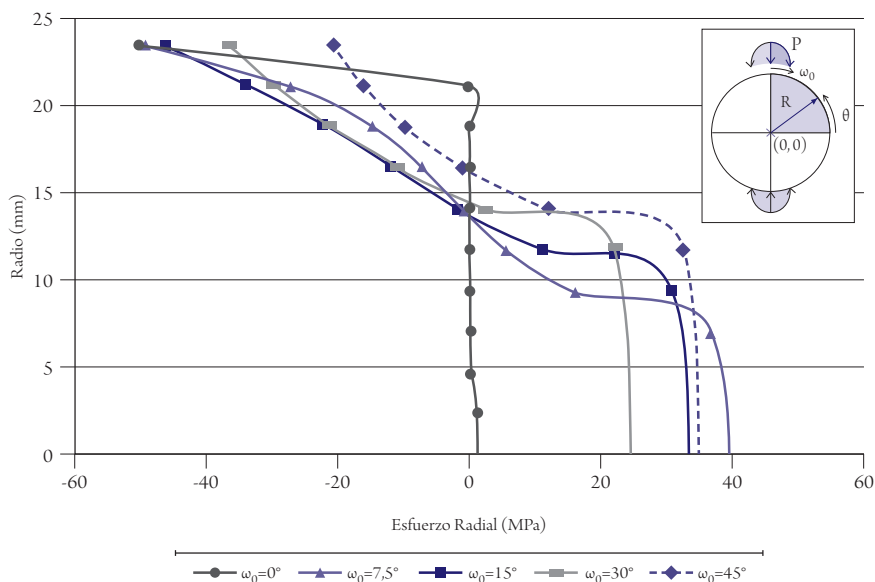


Figura 15. Variación de los esfuerzos σ_{rr} máximos en relación con el valor de ω_0

La figura 15 permite observar que para todos $\omega_0 > 0^\circ$ se presenta un cambio en el estado de esfuerzos de tracción a compresión en aproximadamente $r \approx 0,6 R$. El rango de valores extremos de tensiones se tiene en cercanías al centro $r \approx 0$ del disco para $\omega_0 = 30^\circ$ con 22 Mpa, y el mayor para $\omega_0 = 7,5^\circ$ con 39 Mpa; entre tanto, en el lado de compresiones el rango de los valores extremos de esfuerzo se localizan en $r \approx R$ para $\omega_0 = 7,5^\circ$, el mayor con -49 Mpa y el menor para $\omega_0 = 45^\circ$ con 39 Mpa, se destaca que el máximo esfuerzo de tracción se reduce en el centro a medida que se aumenta el valor de ω_0 llegando a un mínimo para $\omega_0 = 30^\circ$ y vuelve a aumentar para el caso de $\omega_0 = 45^\circ$. La menor relación de esfuerzos de tracción-compresión se alcanza para $\omega_0 = 30^\circ$, con un valor de $\sigma_{rr}^t / \sigma_{rr}^c \approx 0,6$. En la figura 16 se expone la variación del esfuerzo normal en el cuadrante indicado del disco para los diferentes ángulos de carga.

La figura 16 muestra un comportamiento proporcional entre el aumento del valor de ω_0 y el incremento en el valor del esfuerzo máximo a compresión en $r \approx 0$. Para $\omega_0 = 0^\circ$ con -1,1 Mpa y el mayor para $\omega_0 = 45^\circ$ con -57 Mpa. Entre tanto, para los puntos cercanos al perímetro $r \approx R$ el comportamiento es inversamente proporcional, donde se tiene que para $\omega_0 = 0^\circ$ el mayor con -50 Mpa y el menor para $\omega_0 =$

45° con -20 Mpa. En la figura 16 también se evidencia que para $\omega_0 = 30^\circ$ se tiene el mayor grado de compresión en el disco. La figura 17 presenta los bajos niveles de esfuerzos cortantes $\tau_{r\theta}$ que se producen en el disco; nuevamente se observa que en los puntos hacia el interior del disco por dentro del valor $r \approx 0,6 R$ se presentan las mayores variaciones del esfuerzo cortante.

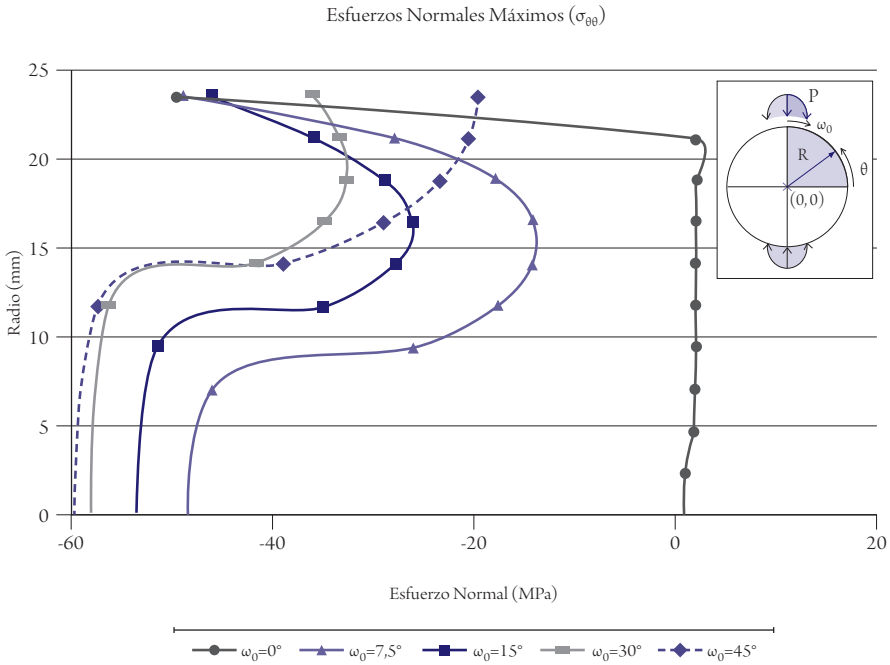


Figura 16. Variación de los esfuerzos $\sigma_{\theta\theta}$ máximos en relación con el valor de ω_0

Del análisis anterior se destacan las condiciones de tracción que se presentan en el componente radial del esfuerzo; así mismo, que en el componente normal prevalece la condición a compresión del material y que el componente del esfuerzo cortante es variable pero de valores bajos de magnitud. En este orden de ideas, bajo las condiciones establecidas en el presente estudio, la mejor condición de esfuerzos a compresión prevalece en el material del disco cuando se tiene una carga aplicada p en un arco de valor $\omega_0 = 30^\circ$.

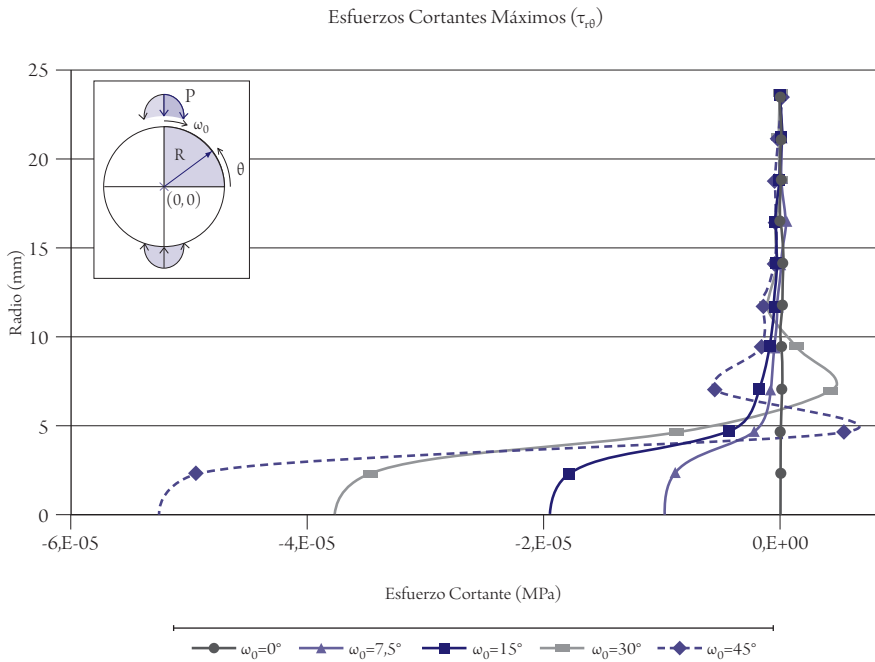


Figura 17. Variación de los esfuerzos $\tau_{r\theta}$ máximos en relación con el valor de ω_0

Conclusiones

Con base en el desarrollo y el análisis de resultados se destacan las siguientes conclusiones:

La propuesta analítica base utilizada (Markides *et al.*, 2012) para la solución del problema de determinar el estado de esfuerzos internos en un disco sometido a una carga diametral presenta un adecuado resultado de la magnitud y distribución de los esfuerzos en el interior del disco, sin embargo, se hace necesaria una depuración de datos puntuales en determinadas zonas donde hay una magnificación del valor del esfuerzo, principalmente en el centro del disco y en puntos cercanos al perímetro que se encuentran en carga, sobre todo en los puntos extremos del arco de carga.

El desarrollo de la etapa de programación es simple y permite a cualquier usuario hacer uso adecuado de los programas que aquí se muestran. La presentación de

los resultados por medio de imágenes con el valor de las magnitudes de esfuerzos, como elevaciones en el disco, generan visualizaciones en 3D que facilitan la localización y la depuración de los valores magnificados de los esfuerzos. Para futuros trabajos se sugiere a los potenciales usuarios de los programas aquí desarrollados implementar la fase de generación de las imágenes en 3D dentro de cada programa.

Con relación a los objetivos de investigación planteados se puede concluir que existe una clara incidencia en el estado tensional dentro del disco por la variación de la longitud de los arcos de contacto de la carga aplicada; con respecto a este punto se determinó que en el rango de variación de $7,5^\circ < \omega_0 < 45^\circ$ la variación del estado de esfuerzos para el componente σ_{rr} dentro de la zona central del disco aumenta aproximadamente 10 veces pero se mantiene en condiciones de tracción; entre tanto, se aprecia que la variación del estado de esfuerzos para el componente $\sigma_{\theta\theta}$ aumenta pero en menor proporción, en aproximadamente solo dos veces, manteniéndose el estado a compresión.

En el análisis de la variación del esfuerzo radial se determinó que la menor relación de esfuerzos de tracción-compresión se alcanza para $\omega_0 = 30^\circ$, con un valor de $\sigma_{rr}^t / \sigma_{rr}^c \approx 0,6$. Por su parte, en el análisis realizado para la variación del esfuerzo normal se hizo evidente que para un valor de $\omega_0 = 30^\circ$ se tiene el mayor grado de compresión en el disco. Existe un punto geométrico particular cercano al valor de $r \approx 0,6 R$ en donde se presentan las mayores variaciones en el estado de los esfuerzos.

Del análisis de resultados realizado se puede concluir que en el componente radial del esfuerzo se presentan esfuerzos de tracción y que, al contrario, en el componente normal no existen esfuerzos de tracción en el material del disco y que el componente del esfuerzo cortante es variable pero de valores bajos de magnitud.

Finalmente, la hipótesis planteada de si existe un valor para ω_0 en el que hay una condición primordialmente de compresión dentro del material no se corrobora en el presente estudio analítico, pero se estableció que la mejor condición de un estado de esfuerzos a compresión prevalece en el material del disco cuando se tiene una carga aplicada p en un arco de valor $\omega_0 = 30^\circ$, esto relacionado también con la menor relación de esfuerzos radiales de tracción-compresión de valor de $\sigma_{rr}^t / \sigma_{rr}^c \approx 0,6$.

Referencias

- American Society for Testing and Materials (ASTM) (2010). *Standard Test Method for Compressive Strength and Elastic Moduli of Intact Rock Core Specimens under Varying States of Stress and Temperatures. Method D. (ASTM D7012-10) and Standard Test Method for Splitting Tensile Strength of Intact rock Core Specimens. (ASTM D3967-08)*. United States: Commite D-18, Revision 1.2.
- Bahamon, S. y Vesga S. (2012). Observación de las líneas de deformación mediante dos tipos de fuentes de luz, en ensayos sobre muestras de acrílico con un espesor de 2.00 cm y diámetro de broca tipo NX (54mm). Documento de trabajo, Universidad de La Salle.
- Brewster David, Trans. Roy. Soc. (London), 1816.
- Chen, C. S., Pan, E. y Amadei B. (1998). Determination of Deformability and Tensile Strength of Anisotropic Rock Using Brazilian Tests. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 1, 43-61.
- Chou, P. Ch. y Pagano, N. J. (1967). *Elasticity: tensor, dyadic and engineering approaches*. New York: Dover Publications (1992, international edition).
- Erarslan, N. y Williams, J. D. (2011). Experimental, numerical and analytical studies on tensile strength of rocks. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 49, 21-30.
- Fairhurst, C. (2007). *On the Validity of the "Brazilian" test for Brittle Materials*. 4 ed. Oxford: Blackwell.
- ISRM, Commission on Standardization of Laboratory and Field Test (2010). *Suggested Methods for Determining Tensile Strength of Rock Materials, and Suggested Methods for Determining the Uniaxial Compressive Strength and Deformability of Rock Materials*. 2 ed. United States: Blue Book.
- Jianhong, J., Wu, F. Q. y Sun, J. Z. (2008). Estimation of the tensile elastic modulus using Brazilian disc by applying diametrically opposed concentrated loads. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 46, 568-576.
- Ma, Ch.-Ch. y Hung, K.-M. (2008). Exact full-field analysis of strain and displacement for circular disks subjected to partially distributed compressions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50, 275-292.
- Markides, Cf. H., Kourkoulis, S. K. y Chatzistergos, P. E. (2012). The Brazilian disk under parabolically varying load: Theoretical and experimental study of the displacement field. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 49, 959-972.

- Markides, Cf. H., Pazis, D. N. y Kourkoulis, S. K. (2010). Closed full-field solutions for stresses and displacements in the Brazilian disk under distributed radial load. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 47, 227-237.
- Markides, Cf. H., Pazis, D. N. y Kourkoulis, S. K. (2012). The Brazilian disk under non-uniform distribution of radial pressure and friction. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 50, 47-55.
- Timoshenko, S. P. y Goodier, J. N. (1970). *Theory of elasticity*. Singapore: McGraw-Hill.
- Wang, Q. Z., Jia, X. M., Kou, S. Q., Zhang, Z. X. y Lindqvist, P. A. (2004). The flattened Brazilian disc specimen used for testing elastic modulus, tensile strength and fracture toughness of brittle rocks: analytical and numerical results. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 41, 245-253.
- Ye, J. H., Wu, F. Q., Zhang, Y. y Ji, H.G. (2012). Estimation of the bi-modulus of materials through deformation measurement in a Brazilian disk test. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 52, 122-131.
- Yu, Y., Zhang, J. y Zhang, J. (2008). A Modified Brazilian Disk Tension Test. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 46, 421-425.

